Megoldás. Jelölje a háromszög szögeit a szokásos módon α, β és γ. Szorozzuk meg az $abc = a+b+c$ egyenlőséget $\frac{\sin\gamma}{c}$-vel és alkalmazzuk az $ab\sin\gamma = 2t$ összefüggést, valamint a szinusztételt:

$$2t = \frac{abc\sin\gamma}{c} = \frac{a\sin\gamma}{c} + \frac{b\sin\gamma}{c} + \frac{c\sin\gamma}{c} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

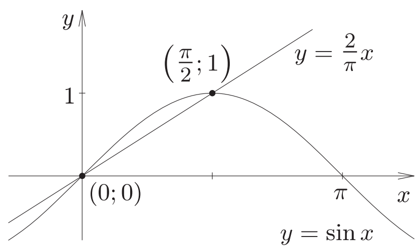
Ezzel a bizonyítandó állítás

$$2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Mivel az $f(x) = \sin x$ függvény a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon alulról szigorúan konkáv, a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \le \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ahol egyenlőség csakis az $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ esetben áll fenn. Ezzel a felső becslést beláttuk.



Az alsó becslés bizonyításához szintén a szinuszfüggvény konkávságát használjuk. Ebből ugyanis következik, hogy a $(0;0)$ pontot a $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ponttal összekötő $y = \frac{2}{\pi}x$ egyenletű egyenes a függvénygörbe alatt halad. Ezért

$$\frac{2}{\pi}\alpha < \sin\alpha, \quad \frac{2}{\pi}\beta < \sin\beta \quad \text{és} \quad \frac{2}{\pi}\gamma < \sin\gamma.$$

Ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\frac{2}{\pi}(\alpha+\beta+\gamma) < \sin\alpha + + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Ebből viszont $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ miatt rögtön adódik a bizonyítandó $2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ egyenlőtlenség. Az is látszik, hogy egyenlőség nem állhat fenn, és a becslés nem javítható, mert a szögek szinuszainak az összege tetszőlegesen közel lehet 2-höz például azokban az egyenlőszárú háromszögekben, melyeknek alapon fekvő szögei majdnem derékszögek.