

Megoldás. Tegyük fel, hogy $p^k + p^m = x^2$ négyzetszám. Ha $m = k$, akkor $2p^k$ osztható kettővel, de nem osztható négyvel, így nem lehet négyzetszám. Tehát feltehető, hogy $k < m$.

Az összeget szorzattá alakítva:

$$p^k(1 + p^{m-k}) = x^2.$$

Mivel a bal oldal négyzetszám, és $1 + p^{m-k}$ nem osztható p -vel, azért k páros kell, hogy legyen. Tehát az egyenletet p^k -nal osztva az egyenlet mindkét oldalán négyzetszám marad:

$$1 + p^{m-k} = a^2, \quad p^{m-k} = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1).$$

A bal oldal prímtényezős felbontásában csak p szerepel, így a jobb oldalon álló szorzat tényezői is p -hatványok. A különbségük azonban 2, ami nem osztható p -vel; így az egyik tényező 1, akkor viszont a másik 3. Ebből $p = 3$, azonban a feladat feltétele szerint $p > 3$. Így ellentmondásra jutottunk, vagyis $p^k + p^m$ nem lehet négyzetszám. A feladat állítását ezzel igazoltuk.