I. megoldás. A feldarabolásban nevezzük *csomópontnak* minden olyan pontot, amely háromszögek közös csúcsa, és *éleknek* azokat a szakaszokat, amelyek csomókat kötnek össze, de a belsejükben nincs csomópont.

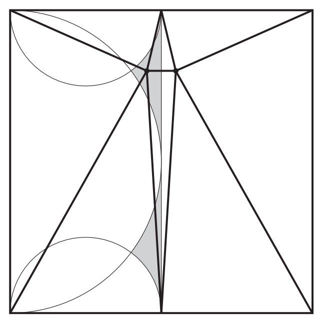
Szükséges, hogy a négyzet belsejében legyen csomópont. A négyzet csúcsaiból befelé élnek kell indulnia, és ha nincs belső csomópont, akkor egy nem szomszédos oldal egyik pontjában végződik, így „elvágja egy másik él útját"; így mindenképpen belső csomópontban kell végződniük a négyzetcsúcsokból induló éleknek.

Tehát legalább egy belső csomópont van, legyen ez A. Az A-ból legalább 5 él indul ki, mert az (A csúcsú) teljes szöget hegyesszögekre kell bontani. Ezek mindegyike nem futhat négyzetcsúcsba: legalább egynek egy másik belső csomópontban vagy belső oldalpontban kell végződnie.

Ha A-n kívül nem lenne más belső csomó, akkor az egyik négyzetoldal belsejében van csomópont: ebből még egy él kiindul a korábbiakon kívül, hogy az egyenesszöget hegyesszögekre vágja szét. Ez viszont csak egy újabb csomópontban végződhet, különben élt keresztezne.

Két belső csomópont mindenképpen keletkezik, melyek mindegyikéből legalább 5–5 háromszög csúcsába fut él, és ezek közül legfeljebb kettő eshet egybe (a csomókat összekötő élre illeszkedő két háromszög). Ezért a felbontásban legalább $2+3+3=8$ háromszögnek kell lennie.

Meg kell még mutatnunk, hogy valóban létezik egy négyzet feldarabolása 8 hegyesszögű háromszögre.



A két, berajzolt látóköríven (Thalesz-körön) kívül eső satírozott rész bármely belső pontját kiválaszthatjuk A-nak. Tengelyes tükrözéssel és a belső él megrajzolásával megkapjuk a 8 megfelelő hegyesszögű háromszöget.

Megjegyzés. A feladat megtalálható *Róka Sándor:* 1000 (2000) feladat az elemi matematika köréből c. könyvében. Az onnan idézett bizonyítás a leírtak hiányossága miatt csak 3 pontot ért.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy legalább 8 háromszög keletkezik. Ennyi háromszögre fel is lehet bontani, például az I. megoldás ábráján látható módon.

Tegyük fel, hogy a felbontást úgy végeztük el, hogy összesen a darab csomópont van a négyzet oldalain, b darab csomópont pedig a négyzet belsejében. Ekkor a felbontás egy olyan gráfot ad, amelynek $c=4+a+b$ darab csúcsa van (a négyzet 4 csúcsa is csúcsa a gráfnak). Ha ℓ háromszög keletkezik, akkor a gráf élei számának a kétszerese pedig:

$$2e=3\ell+4+a.$$

A 3ℓ-lel a négyzet belsejében levő háromszögek oldalait számoltuk meg kétszer, de a négyzet oldalaira esőket csak egyszer, melyek száma pontosan $4+a$. Eulernek a síkba rajzolható gráfokra vonatkozó tétele szerint (ahol a gráfnak c csúcsa, ℓ tartománya és e éle van) $c+\ell=e+1$, amiből $\ell=e+1-c$. Ezt beírva (1)-be azt kapjuk, hogy $2e=3(e+1-c)+a+4=3e-2a-3b-5$, ebből

$$e=2a+3b+5. \qquad (2)$$

Mivel a felbontásban hegyesszögű háromszögek szerepelnek, a négyzet csúcsaiból legalább 3, az oldalán levő pontokból legalább 4, a belső pontokból pedig legalább 5 élnek kell kiindulnia. Ezért $2e\ge 4\cdot 3+a\cdot 4+b\cdot 5$, azaz $e\ge 6+2a+2{,}5b$. Ezt összehasonlítva (2)-vel kapjuk, hogy $b\ge 2$.

Mivel minden belső pontnál legalább 5 háromszögnek kell találkoznia, a két belső pontnál legfeljebb 2 olyan háromszög lehet, ami mindkét belső pont csúcsa. Vagyis legalább $2\cdot 5-2=8$ háromszög van a felbontásban.

Megjegyzések. 1. A II. megoldásban leírt Euler-tételt felhasználva:

$$\ell=8,\quad 2e=3\cdot 8+a+4,\quad c=4+2+a$$

összefüggésekből kapjuk, hogy $16+a=14+a/2+1$, amiből $a=2$, azaz a négyzet élein 2 csomópont van.

2. Az Euler-tétel és a csomókból kiinduló élek számán kívül egy harmadik összefüggést a háromszögek szögeinek összeszámlálásával is nyerhetünk. A II. megoldásbeli jelöléseket használva az ℓ háromszög szögeinek összege $\ell\cdot 180^\circ$, ami megegyezik az egyes csúcsok körül számolt szögek összegével: $4\cdot 90^\circ+a\cdot 180^\circ+b\cdot 360^\circ$. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy $\ell=a+2b+2$. (Következmény: az oldalakon levő csomók száma mindig páros.)

3. Az $\ell=a+2b+n-2$ összefüggés tetszőleges n-szög háromszögfelbontására érvényes.