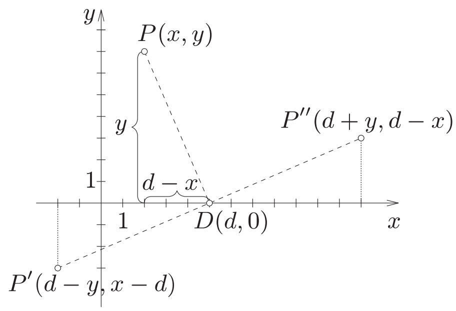
I. megoldás. A B, illetve D csúcsok megtalálásához a négyzet azon tulajdonságát használjuk, miszerint minden csúcs megkapható az A csúcsból az O középpont körüli egymás után vett 90°-os forgatásokkal.

A későbbi tárgyalás egyszerűségéért engedjük meg, hogy a négyzet ponttá fajuljon. Ha ezt nem szeretnék, akkor is egyértelmű, hogy a mértani helyek mely pontjait kell elhagyni.

Ha egy $P(x,y)$ pontot egy $D(d,0)$ pont körül forgatunk $+90^\circ$-kal, akkor nyilván a $P'(d-y,x-d)$ pontot kapjuk, ha -90°-kal forgatjuk, akkor pedig a $P''(d+y,d-x)$ pontot. (Az *1. ábrán* látható megfontolásokhoz hasonlóan belátható a többi esetre is.)

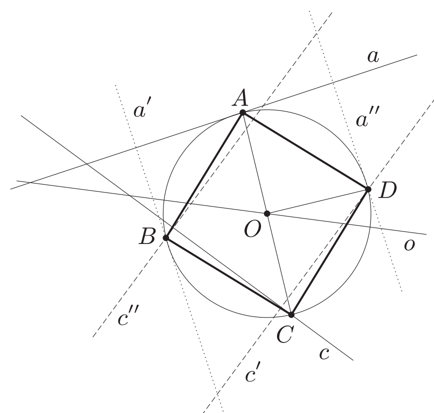


1. ábra

Ezek alapján az adódik, hogy egy $ax+by+c=0$ egyenletű egyenes $+90^\circ$-os elforgatottja D körül: $bx-ay-(a+b)d-c=0$ egyenletű, -90°-os elforgatottja pedig: $bx-ay+(a-b)d+c=0$ egyenletű.

Legyen az o egyenes egy pontja O. Ha létezik hozzá a megfelelő négyzet, akkor legyenek ennek csúcsai $A\in a$, $C\in c$, B és D.

Látható, hogy D az A pont O körüli -90°-os elforgatottja, de D a C pont O körüli $+90^\circ$-os elforgatottja is, ami azt jelenti, hogy D bizonyosan rajta van a -90°-os és c $+90^\circ$-os O körüli elforgatottján, tehát a metszéspontjukban van, ha létezik metszéspont (*2. ábra*). Hasonlóan látható, hogy B az a $+90^\circ$-os és a c -90°-os elforgatottjának metszete, ha létezik.



2. ábra

Helyezzük el az o egyenest az x tengelyen, a és c egyenesek pedig legyenek $a_1x+b_1y+c_1=0$ és $a_2x+b_2y+c_2=0$ egyenletűek. Vegyünk egy $O(u,0)\in o$ pontot.

Az a és c egyenesek felcserélésével B és D szerepe is felcserélődik, ezért most csak a D pontot vizsgáljuk. Legyen D az (x,y) koordinátájú pont. Ekkor, mivel D az a egyenes -90°-os és a c egyenes 90°-os O körüli elforgatottjának metszéspontja, az x-re és y-ra teljesül, hogy

$$b_1x-a_1y+(a_1-b_1)u+c_1=0,$$
$$b_2x-a_2y-(a_2+b_2)u-c_2=0.$$

Ezen egyenletrendszert megoldva adódik, hogy

$$x=\frac{c_2a_1+2a_2a_1u+a_2c_1+b_2a_1u-b_1a_2u}{b_2a_1-b_1a_2},$$

$$y=\frac{b_2a_1u+b_2c_1+b_1c_2+b_1a_2u}{b_2a_1-b_1a_2}, \quad \text{amennyiben} \quad a_1b_2\neq a_2b_1.$$

Viszont az

$$F = a_1b_2 + a_2b_1, \quad G = b_1a_2 - b_2a_1 - 2a_1a_2, \quad H = c_1a_2 + c_1b_2 + c_2b_1 - c_2a_1$$

számokra $Fx + Gy + H = 0$ minden $O(u, 0)$-ra, ami azt jelenti, hogy D mértani helye az $Fx + Gy + H = 0$ egyenletű egyenes.

A B pont mértani helye nyilván a_1 és a_2, b_1 és b_2, valamint c_1 és c_2 felcserélésével kapható meg.

Ha $a_1b_2 = a_2b_1$, akkor $a \parallel c$, továbbá az elforgatottak is párhuzamosak. Csak akkor létezik D vagy B pont, ha egybeesik a két elforgatott, ami nyilván akkor következik be, ha O az a és c egyenesek középvonalán van, azaz a középvonalnak és o-nak van metszéspontja: ekkor D és B mértani helye az a és c egyenesek $+90^\circ$-os elforgatottjai O körül.

Ha $o \parallel a \parallel c$, és o nem az a és c egyenesek középvonala, akkor szerkesztési eljárásunk szerint – ami egyértelműen meghatározza a négyzetet, ha az létezik – nyilván nem létezik B és D, mert az elforgatottak mindig egymástól különböző párhuzamosok. Ha o az a és c egyenesek középvonala, D (és persze B) mértani helye az egész sík.

II. megoldás. A négyzet A és C csúcsa egyenlő távolságra van az o egyenestől, ha $O \in o$. Ha tükrözzük A-t és a rajta átmenő tetszőleges a egyenest az o egyenesre, akkor A' (az A tükörképe) ugyanakkora távolságra lesz o-tól, mint C. Így a lehetséges C és A' pontpárok o-val párhuzamos egyenest határoznak meg, a hozzájuk tartozó O pedig A' és C felezőmerőlegesének és o-nak a metszéspontja lesz. Mivel A' tükörképe a-n lesz, az A pont biztosan a-ra illeszkedik, továbbá B és D is megszerkeszthetőek.

Vegyük a lehetséges $A'C$ szakaszok felezőpontjait (feltéve, hogy o nem párhuzamos sem c-vel, sem a'-vel), ezek egy s egyenesen helyezkednek el, ugyanis c és a' egyeneseket egy o-val párhuzamos o_1 egyenessel elmetszve kapjuk sorban a C_1 és A_1' pontokat, illetve az F_1 felezőpontot. Ha c és a' metszéspontja M, akkor minden további $o_2 \parallel o$ egyenessel metszve a $C_1MA_1'\triangle$-höz hasonló $C_2MA_2'\triangle$-t kapunk az M középpontú hasonlóság szerint. Ez a hasonlóság viszi F_1-et F_2-be. Így a felezőpontok mértani helye az $MF_1 = s$ egyenes. Ha c és a' párhuzamosak, akkor a felezőpontok c és a' középpárhuzamosán lesznek.

Nem szerkeszthető C ily módon, ha nincs c-nek és o_1-nek metszéspontja: $c \parallel o_1$, azaz ha $c \parallel o$. Ekkor az $o_2 = c$ esetben végtelen sok metszéspont jön létre: c bármely pontját választhatjuk C-nek, melyekhez ugyanazon A' tartozik, c és a' metszéspontja, ha van. Ha $o \parallel c \parallel a'$, akkor $o \parallel c \parallel a$ is teljesül, és csak akkor szerkeszthető a négyzet, ha o a középpárhuzamosuk. Ugyanígy A' az egész a' egyenesen választható, ha $a \parallel o$, melyekhez pontosan egy C található, ha a és c nem párhuzamosak, egyébként pedig o-nak középpárhuzamosnak kell lennie.

Az F felezőpont o-ra merőleges vetületeként kapjuk a megfelelő O középpontot.

Felhasználjuk, hogy tetszőleges u, v, w, z és x valós számokkal az $(ux + v, wx + z)$ koordinátákkal megadott pontok mértani helye egy egyenes, ha u és w nem egyszerre 0. Ugyanis ha $u = 0$, akkor az X-tengelyre merőleges egyenesen, ha $w = 0$, akkor az Y-tengelyre merőleges egyenesen lesznek a pontok (továbbá minden pont ilyen alakú, pl. (v, y) pont esetében $x = \dfrac{y - z}{v}$). Ha $uw \neq 0$, akkor

$$\frac{w}{u}(ux + v) + \left(z - \frac{vw}{u}\right) = wx + z$$

alapján a pontok egy $\dfrac{w}{u}$ meredekségű, az Y-tengelyt $z - \dfrac{vw}{u}$-ben metsző egyenesen vannak. (Az egyenes minden pontját megkapjuk ily módon: ha

$$P\left(x_0, \frac{w}{u}x_0 + z - \frac{vw}{u}\right),$$

akkor $x = \dfrac{x_0 - v}{u}$ számmal megkapjuk a P koordinátáit a kívánt módon.)

A megfelelő B pontokat az alábbi módon kaphatjuk meg: kijelölünk s-en egy pontot, és rajta át párhuzamost húzunk o-val. Ahol a párhuzamos metszi c-t, ott lesz C. A kijelölt pont o-ra való merőleges vetülete lesz O. A C-t O körül -90°-kal elforgatva kapjuk B-t.

Tegyük az egyeneseket egy olyan koordináta-rendszerbe, melynek X-tengelyére esik o, az origó pedig legyen o és s metszéspontjában. A B pont szerkesztése során csupa olyan transzformációt végzünk, amellyel a kapott pontok koordinátái egy x tetszőleges valós szám elsőfokú polinomjaként állnak elő, legyen x a kiválasztott pont origótól való távolsága.

Tehát, ha létezik az s egyenes, akkor a B és D pontok mértani helye egy-egy egyenes.

Szerkesztésünk során felbukkant néhány kivételes elrendezés, melyeket külön kell megvizsgálni.

1. Ha $a' \parallel o \parallel c$ és $a' \neq c$, akkor nincs megoldás.

2. Ha o középpárhuzamos, akkor $c = a' = s$ és a sík bármely P pontja lehet B vagy D. Vegyünk ekkor egy tetszőleges O pontot o-n P merőleges vetületén (T) kívül. Szerkesszünk merőlegest OP-re O-n át: ez a merőleges a-t és c-t A-ban és C-ben metszi. Ekkor $AO = CO > OP$ teljesül, ha O elegendően közel van T-hez. O-t távolítva T-től $OA = OC$ tart a és c egyenesek távolságához, OP pedig a végtelenhez folytonosan. A folytonosság miatt lesz egy olyan helyzet, amikor $OA = OC = OP$, ebben a helyzetben P valóban egy előforduló négyzet B csúcsa. Ha O-t az o-n T másik oldalán vesszük fel, akkor D csúcsot kapunk.

3. $a \parallel o$ vagy $c \parallel o$ (és c nem párhuzamos velük). A B és D pontok mértani helye szintén egy-egy egyenes.

4. Bármely két egyenes egybeesésekor csak akkor lesz megoldás a fentiek szerint, ha a és o vagy c és o esnek egybe. 2.-höz hasonlóan a sík bármely pontja jó lesz. (Ha nem engedjük meg az egy ponttá elfajuló négyzeteket, akkor az egyenesek közös metszéspontja nem jó.) Ha a és c egybeesik, akkor megoldást kapunk, ha o is egybeesik velük: 2. szerint a sík minden pontja (nem elfajuló esetben a közös egyenes kivételével) jó, azaz B és D pontok mértani helye. Szintén megoldást kapunk, ha $a=c$ és o metszi őket, ám ekkor a metszéspont kijelöli O-t, B és D az $a=c$ egyenesre O-ban merőleges egyenesen lesznek.

Megjegyzés. Többen félreértették a feladatban feltett kérdést, így csak szerkesztési eljárást adtak arra nézve, hogyan találhatóak meg a négyzet B és D csúcsai rögzített O középpontból és A csúcsból kiindulva. Pontvesztést jelentett a hiányos diszkusszió.