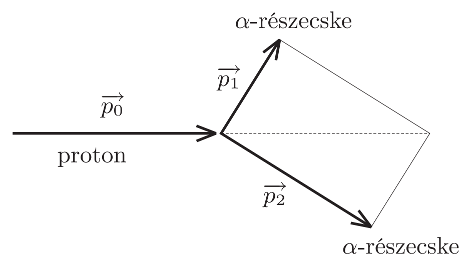
I. megoldás. Jelöljük a proton lendületvektorát $\overrightarrow{p_0}$-lal, a keletkező α-részecskék lendületét pedig $\overrightarrow{p_1}$ és $\overrightarrow{p_2}$ vektorokkal! A folyamat során a lendület megmarad:

$$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}.$$

Igaz továbbá, hogy ha a keletkező részecskék derékszögben repülnek szét (lásd az *ábrát*), akkor Pitagorasz tétele szerint

$$p_1^2 + p_2^2 = p_0^2. \tag{1}$$

(A fenti képletben a nyilazás nélküli kifejezések a megfelelő vektorok hosszát jelölik.)



A folyamat során az energia is megmaradó mennyiség. Ha a reakcióban részt vevő részecskék sebessége a fénysebességhez képest elhanyagolhatóan kicsiny volna, akkor a newtoni fizika képleteit, nevezetesen a

$$p = mv \qquad \text{és} \qquad E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

összefüggéseket alkalmazhatnánk. Ezekkel felírva az energiamegmaradás törvényét:

$$\frac{p_0^2}{2m_\mathrm{p}} = \frac{p_1^2}{2m_\alpha} + \frac{p_2^2}{2m_\alpha}. \tag{2}$$

Mivel az α-részecskék m_α tömege jó közelítéssel az m_p porotontömeg négyszerese, (2) így írható:

$$p_1^2 + p_2^2 = 4p_0^2, \tag{3}$$

ami nyilvánvalóan ellentmond (1)-nek! A részecskék mozgása tehát nem írható le a newtoni fizika törvényeivel, feltétlenül szükséges a *relativisztikus* tárgyalás.

Egy m (nyugalmi) tömegű, v sebességű részecske relativisztikus impulzusát a

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{4}$$

energiáját pedig az

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{5}$$

összefüggések adják meg (c a vákuumbeli fénysebesség). (4)-ből és (5)-ből a sebesség kiküszöbölése után az energia és az impulzus között az

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{6}$$

relációt kapjuk.

A vizsgált folyamat relativisztikus energia-tétele

$$\sqrt{p_0^2c^2 + m_\mathrm{p}^2c^4} + m_\mathrm{Li}c^2 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_\alpha^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_\alpha^2c^4},$$

ami a jó közelítéssel érvényes $m_\mathrm{Li} = 7m_\mathrm{p}$ és $m_\alpha = 4m_\mathrm{p}$ miatt így is felírható:

$$\sqrt{\left(\frac{p_0}{m_\mathrm{p}c}\right)^2 + 1} + 7 = \sqrt{\left(\frac{p_1}{m_\mathrm{p}c}\right)^2 + 16} + \sqrt{\left(\frac{p_2}{m_\mathrm{p}c}\right)^2 + 16}.$$

Érdemes bevezetni az

$$x = \frac{p_1}{m_\mathrm{p}c}, \qquad y = \frac{p_2}{m_\mathrm{p}c} \qquad \text{és} \qquad z = \frac{p_0}{m_\mathrm{p}c}$$

dimenziótlan új változókat, melyek között (1) miatt fennáll az

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{7}$$

összefüggés. Az energiamegmaradás egyenlete az új változókkal kifejezve:

$$\sqrt{z^2+1} + 7 = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{y^2+16}\,. \tag{8}$$

Feladatunk z azon legkisebb értékének meghatározása, amely kielégíti a (8) egyenletet és (7) mellékfeltételt. A (7) összefüggés felhasználásával (8) így is írható:

$$\sqrt{z^2+1} + 7 = \sqrt{x^2+16} + \sqrt{z^2-x^2+16}\,. \tag{9}$$

Deriváljuk (9) mindkét oldalát x szerint, és használjuk ki, hogy a szélsőérték helyén $\dfrac{dz}{dx} = 0$:

$$0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} - \frac{x}{\sqrt{z^2-x^2+16}}\,.$$

Ebből rendezve

$$x = \frac{z}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{z}{\sqrt{2}}\,, \tag{10}$$

vagyis a

$$p_1 = p_2 = \frac{p_0}{\sqrt{2}}$$

eredmény adódik. A keresett határesetben tehát a két α-részecske egyforma nagyságú impulzussal, a beérkező proton mozgásirányához képest szimmetrikusan, 45°-os szögben repül szét. Visszahelyettesítve a (10)-ben szereplő értékeket (8)-ba és azt $z > 0$-ra megoldva $z = \sqrt{168}$, vagyis a proton minimális impulzusára a

$$p_{\min} = \sqrt{168} \cdot m_{\mathrm{p}} c$$

eredmény adódik. Ezt (4)-gyel összevetve a proton sebességére a

$$\frac{v}{c} \geq \sqrt{\frac{168}{169}} = 0{,}997$$

korlátot kapjuk. (Ekkora a sebességgel a legalább 12 GeV energiára felgyorsított protonok rendelkeznek.)

II. megoldás. Jelölje a részecskék tömegét, energiáját, impulzusát rendre m_i, E_i és $\boldsymbol{p}_i$, ahol az i index helyére p, α, vagy Li írandó aszerint, hogy protonról, alfa-részecskéről vagy Li-atommagról van szó. Az egyszerűség kedvéért használjunk olyan egységrendszert, amelyben a c fénysebesség egységnyi nagyságú.[1]

A részecskék energiája és impulzusa között minden pillanatban fennáll az $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$ egyenlőség (a relativitáselméletben ezt tömeghéj-feltételnek nevezik). Az ütközésre érvényes az energiamegmaradás:

$$E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{Li}} = E_{\alpha,1} + E_{\alpha,2},$$

amely a tömeghéj-feltétellel így írható:

$$\sqrt{\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}^2 + m_{\mathrm{p}}^2} + m_{\mathrm{Li}} = \sqrt{\boldsymbol{p}_{\alpha,1}^2 + m_\alpha^2} + \sqrt{\boldsymbol{p}_{\alpha,2}^2 + m_\alpha^2}. \tag{1}$$

Másrészt (mivel a részecskerendszerre külső erő nem hat) teljesül az impulzusmegmaradás is:

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{p}_{\alpha,1} + \boldsymbol{p}_{\alpha,2},$$

amiből a 90°-ban szétrepülő α-részecskék miatt (Pitagorasz tétele szerint)

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}^2 = \boldsymbol{p}_{\alpha,1}^2 + \boldsymbol{p}_{\alpha,2}^2 \tag{2}$$

következik.

Az (1) egyenlet jobb oldala a számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség segítségével átírható a következőképpen:

$$\frac{\sqrt{\boldsymbol{p}_{\alpha,1}^2 + m_\alpha^2} + \sqrt{\boldsymbol{p}_{\alpha,2}^2 + m_\alpha^2}}{2} \leq \sqrt{\frac{\boldsymbol{p}_{\alpha,1}^2 + m_\alpha^2 + \boldsymbol{p}_{\alpha,2}^2 + m_\alpha^2}{2}}\,,$$

[1] A $c = 1$ választás áttekinthetőbbé teszi a megoldást, a hiányzó c-ket pedig a számolás végén a dimenzióanalízis módszerének alkalmazásával egyszerűen visszaírhatjuk.

ami (2) felhasználásával

$$\sqrt{\boldsymbol{p}_{\alpha,1}^2 + m_\alpha^2} + \sqrt{\boldsymbol{p}_{\alpha,2}^2 + m_\alpha^2} \le \sqrt{2\big(\boldsymbol{p}_\mathrm{p}^2 + 2m_\alpha^2\big)}$$

alakra hozható. Ezt az (1) energia-mérlegegyenlettel összevetve egy olyan egyenlőtlenséghez jutunk, amiben már csak $\boldsymbol{p}_\mathrm{p}^2$ a változó:

$$\sqrt{\boldsymbol{p}_\mathrm{p}^2 + m_\mathrm{p}^2} + m_\mathrm{Li} \le \sqrt{2\big(\boldsymbol{p}_\mathrm{p}^2 + 2m_\alpha^2\big)}. \tag{3}$$

Négyzetre emelés, majd rendezés után (3)-ból a következőhöz jutunk:

$$0 \le \boldsymbol{p}_\mathrm{p}^4 - 2\boldsymbol{p}_\mathrm{p}^2\left(m_\mathrm{p}^2 + 3m_\mathrm{Li}^2 - 4m_\alpha^2\right) + \left[\left(4m_\alpha^2 - m_\mathrm{p}^2 - m_\mathrm{Li}^2\right)^2 - 4m_\mathrm{p}^2 m_\mathrm{Li}^2\right]. \tag{4}$$

Ez $\boldsymbol{p}_\mathrm{p}^2$-re nézve másodfokú egyenlőtlenség.

Ha a magok kötési energiáját elhanyagoljuk, vagyis az

$$m_\mathrm{Li} \approx 7m_\mathrm{p}, \qquad m_\alpha \approx 4m_\mathrm{p} \tag{5}$$

közelítéseket használjuk, (4) jobb oldalán a szögletes zárójelben álló konstans tag értéke nullának adódik. Táblázatbeli, pontos tömegértékek felhasználásával persze erre a kifejezésre véges értéket kapunk, de mivel (a feladat szövege szerint) a proton *nagy energiájú* (ezért nagy impulzusú is), így (4) jobb oldalán az első két tag mellett az utolsót nyugodtan elhanyagolhatjuk.

Mivel p_p^2 értéke biztosan nagyobb, mint nulla, a (4) egyenlőtlenségből a következőt kapjuk:

$$\left|\boldsymbol{p}_\mathrm{p}\right| \ge \sqrt{2m_\mathrm{p}^2 + 6m_\mathrm{Li}^2 - 8m_\alpha^2}.$$

Az (5) közelítésekkel és a fénysebesség visszaírásával a proton impulzusára a

$$\left|\boldsymbol{p}_\mathrm{p}\right| \ge \sqrt{168}\, m_\mathrm{p} c megszortstkapjuk.Arelativisztikusimpulzus\left|\boldsymbol{p}_\mathrm{p}\right| = \frac{m_\mathrm{p} v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} kifejezstfelhasznlvaezaztjelenti, hogyapr$$

$0{,}997\, c, vagyisafnysebessg 99,7 szzalkavolt.$

(*Vígh Máté*)