Megoldás. a) A gumiszál a megnyúlással arányos $F = D\Delta\ell$ erőt fejt ki. Abban a pillanatban, amikor az m tömegű alsó labda elkezd emelkedni, a rá ható erők $F - mg$ eredője még éppen nulla, ahonnan a gumiszál „rugóállandója”:

$$D = \frac{mg}{\Delta\ell} = \frac{0{,}06\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}6\ \mathrm{m}} \approx 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,.$$

A munkatétel értelmében egy test mozgási energiájának megváltozása megegyezik a rá ható erők munkájának előjeles összegével. Jelen esetben a felső labda sem az emelési folyamat elején, sem pedig a végén sem mozog számottevő sebességgel, tehát $\Delta E_{\mathrm{kin}} = 0$. Így

$$W - mg\Delta\ell - \frac{1}{2}D\Delta\ell^2 = 0,$$

az emelés során általunk végzett munka tehát

$$W = mg\Delta\ell + \frac{1}{2}D\Delta\ell^2 = \frac{3}{2}mg\Delta\ell \approx 0{,}53\ \mathrm{J}.$$

b) A felső labdára annak elengedésétől a másik labdához csapódásáig is alkalmazhatjuk a munkatételt. A nehézségi erő a mozgás teljes $\ell_0 + \Delta\ell$ hosszúságú szakaszán végig hat, míg a gumikötél csak az $\ell_0 = 40$ cm-es magasság eléréséig, ugyanis a gumikötél (a rugóktól eltérően) *nem* nyomódik össze. A munkatétel szerint

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg(\ell_0 + \Delta\ell) + \frac{1}{2}D\Delta\ell^2,$$

ahonnan a labda becsapódási sebessége:

$$v_1 = \sqrt{2g(\ell_0 + \Delta\ell) + \frac{D}{m}\Delta\ell^2} = \sqrt{g(2\ell_0 + 3\Delta\ell)} \approx 5{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

c) A feladat harmadik részében a mozgást két részre kell bontanunk. Az első rész (ameddig a felső labdára ható erő az elmozdulással arányosan változik) *harmonikus rezgőmozgással* írható le, ez a gumikötél nyújtatlan állapotáig tart. Ezután a labda szabadon esik, mozgása tehát valamekkora kezdősebességgel induló *függőleges hajítás.*

Tételezzük fel, hogy a gumiszál tökéletes, összenyomódásra is képes *rugóként* viselkedik. (Ez elfogadható feltevés, hiszen a rezgőmozgásnak úgyis csak azt a szakaszát vizsgáljuk, amelyben a szál még nem nyomódott össze.) A teniszlabda ekkor (a megtett úttal arányosan változó rugóerő és a konstans nehézségi erő hatására) olyan harmonikus rezgőmozgást végez, melynek egyensúlyi helyzete ott lesz, ahol a labdára ható nehézségi erő és a rugóerő nagysága megegyezik:

$$D\Delta\ell' = mg, \qquad \text{vagyis} \qquad \Delta\ell' = \frac{mg}{D} = 0{,}6\ \mathrm{m}.$$

Ha tehát a gumikötél tökéletes rugóként viselkedne, a labda egyensúlyi helyzete a kötél nyújtatlan állapotától 0,6 méterrel mélyebben, vagyis 0,2 m-rel a talajszint alatt lenne. Tekintve, hogy a labda mozgásának felső fordulópontja a talajszint felett 1 méterre van, a rezgőmozgás amplitúdója $A = 1{,}2$ m.

A gumiszál akkor lazul meg, amikor a lefelé mozgó labda a talajtól 0,4 méterre, vagyis a rezgőmozgás egyensúlyi helyzetétől $0{,}6\ \mathrm{m} = \frac{A}{2}$ távolságban van. A nulla kezdősebességű rezgőmozgás

$$y(t) = A\cos\omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

általános képletébe behelyettesítve a kiszámított adatokat a mozgás első szakaszának t_1 időtartamára kapjuk, hogy

$$\frac{A}{2} = A\cos(\omega t_1), \qquad \text{vagyis} \qquad \omega t_1 = \frac{\pi}{3}\,,$$

ahonnan

$$t_1 = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}} \approx 0{,}26\ \mathrm{s}.$$

A második szakasz időtartamának kiszámításához ismernünk kell a függőleges hajítás v_0 kezdősebességét. Ezt ismét munkatétellel számolhatjuk:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}D\Delta\ell^2 + mg\Delta\ell = \frac{3}{2}mg\Delta\ell,$$

ahonnan

$$v_0 = \sqrt{3g\Delta\ell} = 4{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

A szabadesés idejét például az egyenletesen gyorsuló mozgás

$$\frac{v_1 - v_0}{t_2} = g$$

összefüggéséből határozhatjuk meg, ahol v_1 a b) kérdésnél kiszámított becsapódási sebesség. Innen

$$t_2 = \frac{5{,}1 - 4{,}2}{9{,}8}\ \mathrm{s} \approx 0{,}09\ \mathrm{s},$$

a felső labda teljes mozgásideje pedig

$$T = t_1 + t_2 \approx 0{,}35\ \mathrm{s}.$$

Megjegyzések. 1. Sok megoldó a c) kérdésben szereplő mozgás első szakaszának idejét a változó gyorsulású mozgás átlagos gyorsulásának segítségével próbálta meghatározni. Úgy érveltek, hogy a felső labda gyorsulása az indulás pillanatában $2g$, a gumiszál nyújtatlan állapotának elérésekor pedig csak g, tehát átlagosan $1{,}5\,g$ gyorsulással számolhatunk. Ez azonban *hibás* eredményre vezet! A gyorsulás ugyanis a megtett *úttal arányosan* változik, nem pedig az eltelt idővel, emiatt az „átlagos" gyorsulás nem a kezdeti és végső gyorsulás számtani közepe, hanem – a harmonikus rezgőmozgás képleteinek felhasználásával – csak bonyolultabb módon számítható ki. A kétféle számítás eredménye között numerikusan kicsiny, mindössze 0,02 s az eltérés.

2. Néhányan úgy számították ki a felső labda mozgásidejét, hogy a labda által megtett utat sok kicsiny részre osztották, mindegyik szakasz elejéhez és végéhez tartozó sebességet a munkatételből határozták meg, majd a kicsiny szakaszon a kezdő- és végsebesség átlagával (számtani közepével) számolt egyenletes mozgás képleteit alkalmazták. Ez elvileg helyes, numerikus közelítő megoldás, amely – a felosztás finomításával – tetszőlegesen megközelíti a „pontos" megoldást. Ennek a módszernek az az előnye, hogy elvben tetszőleges mozgás leírására alkalmas, nem csak az ismert típusú mozgásokra, továbbá könnyen programozható.