I. megoldás. Feltételezzük, hogy a sugárforrás gömbszimmetrikusan bocsát ki γ-fotonokat, és ezek a forrás és a detektor között szabadon, elnyelődés- és szóródásmentesen terjednek. Ha a forrás percenként N_f fotont bocsát ki, és a detektor érzékelő felülete A területű, akkor az R távolságban lévő érzékelő percenként

$$N(R) = N_\mathrm{f}\,\frac{A}{4\pi R^2}$$

beütést fog jelezni.

Megjegyzés. Ha a detektor csak $\eta < 1$ hatásfokkal jelzi a becsapódó fotonokat, akkor a fenti képletben N_f helyébe ηN_f írandó; ennek a tényezőnek azonban a továbbiakban nem lesz jelentősége.

Az érzékelő felület R távolsága a forrás és a GM-cső ablakának mérhető r távolságából és egy ismeretlen d mélységi adatból tevődik össze:

$$R = r + d.$$

Ezen elméleti megfontolás szerint a megadott r távolságok és a hozzájuk tartozó beütésszámok közötti kapcsolat:

$$N(r) = N_\mathrm{f}\,\frac{A}{4\pi (r+d)^2} = \text{állandó}\cdot\frac{1}{(r+d)^2}\,.$$

Ezt az összefüggést a megadott adatpárok közül bármely kettőre alkalmazva és a hányadosukat képezve az ismeretlen állandó kiejthető:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{(r_2+d)^2}{(r_1+d)^2}\,. \tag{1}$$

Ez d-re nézve másodfokú egyenletté alakítható és megoldható. Ha például az első két adatpárból számolunk (és a centméterben mért távolságok mértékegységét nem írjuk ki), akkor a

$$\frac{487}{196} = \frac{(3+d)^2}{(1+d)^2}\,,$$

$$291\,d^2 - 202\,d - 1277 = 0$$

egyenletet kapjuk, melynek fizikailag elfogadható (pozitív) gyöke: $d = 2{,}47$ cm. Ezt a d értéket visszaírva (1)-be és az arányt most $r_1 = 1$ cm és $r_2 = 12$ cm távolságokra alkalmazva a keresett beütésszámra

$$N(r = 12\ \text{cm}) = N_{12} = \frac{(1+2{,}47)^2}{(12+2{,}47)^2}\cdot 487\ \approx 28$$

értéket kapjuk.

Ugyanezt a számolást más értékpárokkal, pl. a táblázat első és utolsó számoszlopával (az $r = 1$ cm-nek és az $r = 9$ cm-nek megfelelő adatokkal) is elvégezhetjük. Ezekből $d = 2{,}27$ cm-t és $N_{12} \approx 26$ beütést kapunk. A rendelkezésünkre álló valamennyi adatpárból kiszámolhatjuk d-t és N_{12}-t, majd ezek valamilyen átlagát képezve pontosíthatjuk becslésünket.

II. megoldás. Az I. megoldás gondolatmenetét követve eljutunk odáig, hogy a beütésszám az r távolságtól

$$N(r) = \text{állandó}\cdot\frac{1}{(r+d)^2}\,. \tag{2}$$

módon függ. Ebből az összefüggésből szeretnénk – a megadott mérési adatok felhasználásával – minél pontosabban „kihámozni” az ismeretlen d mennyiséget.

Észrevehetjük, hogy (2) átírható

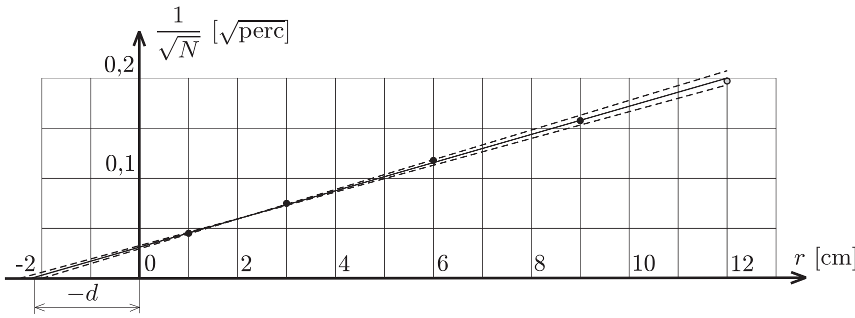
$$\frac{1}{\sqrt{N}} = \text{állandó}\cdot(r+d)$$

alakra (ahol az „állandó” természetesen más, mint a (2)-ben szereplő állandó mennyiség). Eszerint, ha az $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ mennyiséget r függvényében ábrázoljuk, a lineáris kapcsolat miatt egy egyenest kell kapjunk, amelynek tengelymetszete éppen $-d$. (Az, hogy a mérési adatoknak megfelelő pontok milyen pontosan illeszkednek egy egyenesre, felvilágosítást adhat az elméleti megfontolásunk megalapozottságáról, illetve a mérés pontosságáról is.)

A *grafikonról* leolvashatjuk, hogy jelen esetben a tengelymetszet

$$-d \approx -2{,}3\ \text{cm},$$

és ennek a becslésnek a bizonytalansága kb. 0,2 cm. A szaggatott vonalak a szemmel illesztett (a „még talán elfogadható”) egyeneseket jelölik. Számítógéppel ennél megalapozottabb illesztési eljárások is könnyen elvégezhetők.



Az illesztett egyenesek $r = 12$ cm-nél $1/\sqrt{N}$-re $0{,}195 \pm 0{,}01$-et adnak, a várt beütésszám tehát ennél a távolságnál 26 ± 3.