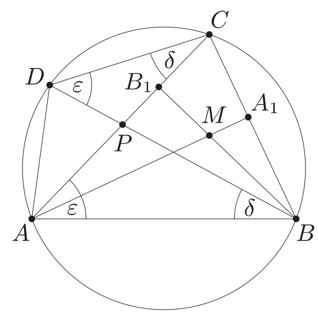
Megoldás. Először belátunk egy segédállítást. Az ABC háromszögben a B-ből induló súlyvonal az AC oldalt P-ben metszi, a háromszög köré írt kört pedig D-ben (*1. ábra*). Azt állítjuk, hogy ha az

$ABP\sphericalangle=\delta=DCP\sphericalangle$, és $BAP\sphericalangle=\varepsilon=CDP\sphericalangle$, tehát az ABP és CDP háromszögek hasonlóak, akkor az $ABCD$ konvex négyszög húrnégyszög.

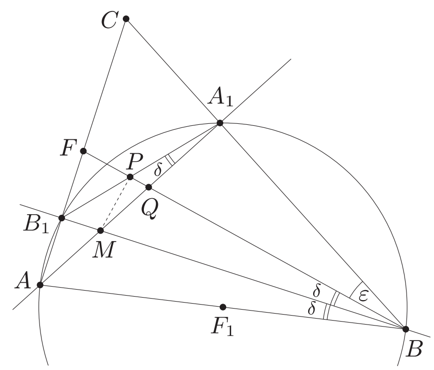


1. ábra

Az ABD háromszög köré írt körben az ABD körív pontjaiból az AD szakasz δ szög alatt látszik. Mivel az $ABD\sphericalangle=\delta=ACD\sphericalangle$, emiatt a C pont is rajta van ezen a köríven. Tehát az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, és ekkor az is igaz lesz, hogy $BAP\sphericalangle=\varepsilon=CDP\sphericalangle$, mert ezek a BC húrhoz tartozó kerületi szögek.

Ezután térjünk át a feladat állítására. Rajzoljuk meg az ABC háromszögben az A-ból és B-ből induló magasságvonalakat, talppontjuk A_1, illetve B_1 (*2. ábra*). A B-ből induló súlyvonal AC-t F-ben metszi, az AB felezőpontja legyen F_1, valamint az AA_1 és BF metszéspontja legyen Q. Ha $B_1C=3AB_1$, akkor – mivel a háromszög hegyesszögű – B_1 rajta van az AC szakaszon, ezért $AB_1=B_1F$. Legyen

$B_1BF\sphericalangle=\delta$, és $A_1BP\sphericalangle=\varepsilon$.



2. ábra

Most azt látjuk be, hogy ha $B_1C=3AB_1$, tehát $AB_1=B_1F$, akkor $BPM\sphericalangle=90^\circ$. Megmutatjuk, hogy ekkor $ABB_1\sphericalangle=\delta$. Mivel a QA_1B szög 90°, az A_1QB szög $90^\circ-\varepsilon$, tehát az $MQB\sphericalangle=PQA_1\sphericalangle==90^\circ+\varepsilon$, emiatt a $QMB\sphericalangle=90^\circ-\delta-\varepsilon$. Mivel az $AA_1B\sphericalangle=AB_1B\sphericalangle=90^\circ$, a Thalész-tétel miatt A_1 és B_1 rajta van azon a körön, melynek középpontja F_1, és a sugara $\dfrac{AB}{2}$. Emiatt az ABA_1B_1 négyszög húrnégyszög, tehát $AA_1B_1\sphericalangle=ABB_1\sphericalangle=\delta$. Ezért a $QPA_1\sphericalangle=90^\circ-\delta-\varepsilon$. Ekkor az $A_1PB\sphericalangle=A_1MB\sphericalangle$, és $PA_1M\sphericalangle=PBM\sphericalangle$, tehát a PA_1Q és MQB háromszögek hasonlók. Így alkalmazhatjuk a segédállítást, vagyis az MBA_1P négyszög húrnégyszög. Emiatt az $MA_1B\sphericalangle=MPB\sphericalangle=90^\circ$, tehát igaz, hogy ha $B_1C=3AB_1$, akkor $BPM\sphericalangle=90^\circ$.

Végül pedig azt bizonyítjuk be, hogy ha $BPM\sphericalangle=90^\circ$, akkor $AB_1=B_1F$, és mivel a háromszög hegyesszögű, $B_1C=3AB_1$. Az előző esethez hasonlóan számolva $A_1QB\sphericalangle=90^\circ-\varepsilon$, az $MQB\sphericalangle=90^\circ+\varepsilon$, és a $PMB\sphericalangle=90^\circ-\delta-\varepsilon$. Mivel az $MPB\sphericalangle=MA_1B\sphericalangle=90^\circ$, ezért az MPA_1P négyszög húrnégyszög. Ekkor az $MBP\sphericalangle=MA_1P\sphericalangle=\delta$, és az

$$A_1MB\sphericalangle=A_1PB\sphericalangle=90^\circ-\delta-\varepsilon.$$

Tudjuk, hogy az ABA_1B_1 négyszög húrnégyszög. Tehát az

$$AA_1B_1\sphericalangle=ABB_1\sphericalangle=\delta,$$

vagyis az $ABB_1\sphericalangle=B_1BF\sphericalangle$. Ekkor az ABB_1 és B_1BF háromszögekben a megfelelő szögek megegyeznek, a B_1B oldal pedig közös, tehát ez a két háromszög egybevágó, emiatt $AB_1=B_1F$, ezért

$B_1C=3AB_1$.

Tehát valóban a BPM pontosan akkor derékszög, ha $B_1C=3AB_1$.