

I. megoldás. Legyen a vizsgált polinom $P(x) \neq 0$, ezt szeretnénk olyan $Q(x) \neq 0$ polinommal szorozni, amire a $P(x)Q(x)$ polinomban minden tag kitevője osztható 3-mal.

Legyen $S_n(x)$ ($n = 1, 2, 3$) olyan polinom, amely $P(x)$ -nek az összes olyan tagját tartalmazza (előjelével, együtt-hatójával együtt), amelynek kitevője 3-mal osztva n -et ad maradékul. Tehát $S_1(x) + S_2(x) + S_3(x) = P(x)$.

Ha $S_1(x) = S_2(x) = 0$, akkor kész vagyunk; ha nem, szorozzuk meg $P(x)$ -et $(S_1(x) - S_2(x))$ -szel (ami nyilván nem 0):

$$P(x)(S_1(x) - S_2(x)) = S_1^2(x) - S_2^2(x) + S_3(x)S_1(x) - S_3(x)S_2(x).$$

Ekkor $S_1^2(x)$ -ben és $S_3(x)S_2(x)$ -ben minden tag kitevője 2-t ad maradékul 3-mal osztva. (Ha elvégezzük a négyzetreemelését $S_1^2(x)$ -ben, akkor minden kitevő két olyan számnak az összege lesz, amelyek 3-mal osztva 1-et adnak maradékul; míg $S_3(x)S_2(x)$ -ben a szorzás elvégzésekor minden tag kitevője egy 3-mal osztható és egy 3-mal osztva 2 maradékot adó szám összege.) $S_2^2(x)$ -ben és $S_3(x)S_1(x)$ -ben minden tag kitevője 1-et ad maradékul 3-mal osztva. Tehát $(P(x)(S_1(x) - S_2(x)))$ -ben egyik tag kitevője sem osztható 3-mal. Legyen T_n ($n = 1, 2$) olyan polinom, amely $(P(x)(S_1(x) - S_2(x)))$ -nek az összes olyan tagját tartalmazza (előjelével, együtt-hatójával együtt), amelynek kitevője 3-mal osztva n -et ad maradékul. Tehát $T_1(x) + T_2(x) = P(x)(S_1(x) - S_2(x))$.

Szorozzuk meg $(P(x)(S_1(x) - S_2(x)))$ -et $(T_1^2(x) - T_1(x)T_2(x) + T_2^2(x))$ -szel (ami nem 0):

$$P(x)(S_1(x) - S_2(x))(T_1^2(x) - T_1(x)T_2(x) + T_2^2(x)) = T_1^3(x) - T_2^3(x).$$

Nem nehéz megmondolni, hogy $T_1^3(x)$ és $T_2^3(x)$ minden tagjának kitevője osztható 3-mal.

Tehát

$$Q(x) = (S_1(x) - S_2(x))(T_1^2(x) - T_1(x)T_2(x) + T_2^2(x))$$

egy megfelelő, nemnulla polinom. (Ha $P(x)$ minden tagjának kitevője osztható 3-mal, nem kell szoroznunk semmivel.)

II. megoldás. Azt állítjuk, hogy az adott n -edfokú $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ polinomot meg tudjuk szorozni egy legfeljebb $2n$ -edfokú $b_{2n} x^{2n} + \dots + b_1 x + b_0$ polinommal úgy, hogy a legfeljebb $3n$ -edfokú szorzat polinom megfelelő legyen. $n > 0$ -ra bizonyítunk, $n = 0$ -ra $b_0 = 1$ triviális megoldás. A cél elérésének szükséges és elégséges feltétele az, hogy a 3-mal nem osztható kitevőjű tagok együtt-hatója 0 legyen.

Ha $0 \leq k \leq 3n$, és k nem osztható 3-mal, akkor:

$$\sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq k-i \leq 2n} a_i b_{k-i} = 0.$$

Ez összesen $2n$ különböző kitevőt jelent, amely ugyanannyi egyenletet ad. Tehát egy, a b_0, b_1, \dots, b_{2n} változókra vonatkozó, $2n + 1$ ismeretlenes, $2n$ egyenletből álló lineáris egyenletrendszer kapunk. Mivel az egyenletek száma kevesebb, mint az ismeretlenek száma, ezért az egyenletrendszernek vagy nincs megoldása, vagy végtelen sok megoldása van. Az utóbbi fog teljesülni, hiszen $b_i = 0$ triviális megoldása az egyenletrendszernek, csak éppen ezt az egy polinomot tiltja a feladat kikötése. De akkor van (végtelen sok) más olyan megoldás is, amiben van nemnulla együtt-ható, így megfelelő polinomot eredményez.

Megjegyzés. A második megoldásból kiderül, hogy a 3-mal való oszthatóságnak a feladat állításának teljesülésében csupán annyi a szerepe, hogy végtelen sok 3-mal osztható természetes szám van. Igaz tehát a következő: ha s természetes számoknak tetszőleges végtelen sorozata, akkor minden nemnulla polinomnak van olyan nemnulla polinomszorosa, amelyben minden tag kitevője s -hez tartozik.