Megoldás. $a_n = \left[n\sqrt{2}\right] = 3^k$ pontosan akkor teljesül valamilyen egész k-ra, ha $n\sqrt{2} - 1 < 3^k < n\sqrt{2}$, vagyis $n - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3^k}{\sqrt{2}} < n$. (Nyilván 3^k nem lehet egyenlő sem $\left(n\sqrt{2} - 1\right)$-gyel, sem $n\sqrt{2}$-vel, hiszen mindkettő irracionális szám.)

Jelöljük $f(k)$-val $\frac{3^k}{\sqrt{2}}$ tört részét, vagyis $f(k) = \frac{3^k}{\sqrt{2}} - \left[\frac{3^k}{\sqrt{2}}\right]$.

Láttuk, hogy $a_n = 3^k$ pontosan akkor teljesül, ha $n - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{3^k}{\sqrt{2}} < n$. Ekkor

$$f(k) > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}2929.$$

Ha pedig $f(k) > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor létezik olyan n, amelyre $a_n = 3^k$.

Azt, hogy az a_n sorozat 3-nak végtelen sok egész kitevős hatványát tartalmazza, a következőképpen látjuk be: Bebizonyítjuk, hogy ha van egy olyan k, amelyre 3^k nem szerepel az a_n sorozatban, akkor létezik olyan $\ell > k$ természetes szám, amelyre 3^ℓ szerepel a sorozatban.

Először azt látjuk be, hogy $0 < x \le 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0{,}293$ esetén van egy olyan $m \in \mathbb{N}$, amelyre $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < x \cdot 3^m < 1$. Ha $x \cdot 3^{m-1} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < 0{,}293$, de $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < x \cdot 3^m$, akkor $x \cdot 3^m < 3 \cdot 0{,}293 = 0{,}879 < 1$.

Az $f(k)$ nyilván nem lehet 0 egyetlen egész k esetén sem. Ebből, és a fentiekből következik, hogy amennyiben $f(k) \le 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, vagyis 3^k nem szerepel az a_n sorozatban, akkor van egy m természetes szám, amelyre

$$f(k+m) = 3^m \cdot f(k) > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy 3^{k+m} szerepel az a_n sorozatban, tehát $\ell = k + m$ megfelelő.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy 3-nak végtelen sok egész kitevős hatványát tartalmazza az a_n sorozat.