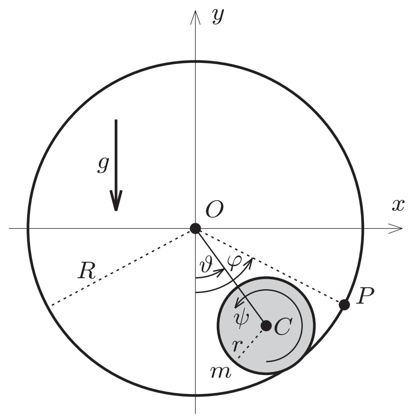
Megoldás. *a*) A megoldást érdemes az egyenletesen gyorsuló gömb esetével kezdenünk (hiszen ez speciális esetként tartalmazza az egyenletesen forgó és az álló gömb esetét is).

Tegyük fel, hogy a gömb P pontja φ szöggel fordul el a kiindulási, legalsó helyzetből (*1. ábra*). Eközben a golyó tiszta gördüléssel mozog, és a golyó C középpontja ϑ szöggel fordul el. A golyónak a gömb egyes felületi pontjaihoz képesti összes elfordulása:

$$\frac{R(\varphi-\vartheta)}{r}.$$

A golyó teljes ψ elfordulását úgy kaphatjuk meg, ha a gömb felszínéhez képesti elforduláshoz hozzáadjuk még a golyó C középpontjának elfordulását is:

(1)
$$\psi=\frac{R(\varphi-\vartheta)}{r}+\vartheta=\frac{R}{r}\varphi-\frac{R-r}{r}\vartheta.$$



1. ábra

Jelöljük a plexigömb (állandó) szöggyorsulását β-val, a golyó tömegközéppontjának érintő irányú gyorsulás-összetevőjét a-val, a golyó saját középpontja körüli szöggyorsulását pedig $\beta_{\text{golyó}}$-val. Mivel a szögelfordulások és a szöggyorsulások (egy bizonyos rövid időtartam alatt) arányosak egymással, az (1) összefüggésből leolvasható a szöggyorsulásokra vonatkozó megszorítás, tehát a mozgás kényszerfeltétele is:

(2)
$$\beta_{\text{golyó}}=\frac{R}{r}\beta-\frac{R-r}{r}\cdot\frac{a}{R-r}.$$

Megjegyzés: (2)-t átrendezve $R\beta=a+r\beta_{\text{golyó}}$ alakra hozhatjuk, ami azt fejezi ki, hogy a gömb felszínének érintőleges gyorsulása a golyó tömegközépponti és kerületi gyorsulásának összege. Kényszerfeltételek felírásában gyakorlottak ezt a kapcsolatot számolás nélkül, ránézésre is fel tudják írni.

A golyóra ható súrlódási erőt jelöljük S-sel, a golyó tömegközéppontjának szöggyorsulását pedig β_{t}-vel! Ez utóbbi nyilván kifejezhető a tömegközéppont érintőleges gyorsulásával:

(3)
$$\beta_{\text{t}}=\frac{a}{R-r}.$$

A dinamikai egyenletek:

(4)
$$S-mg\sin\vartheta=ma=m(R-r)\beta_{\text{t}},$$

(5)
$$Sr=\frac{2}{5}mr^2\,\beta_{\text{golyó}}.$$

A (2)–(5) egyenletrendszerből kiküszöbölve az S, a és $\beta_{\text{golyó}}$ mennyiségeket, a golyó tömegközéppontjának szögkitérése és szöggyorsulása között a következő összefüggést kapjuk:

(6)
$$\beta_{\text{t}}=-\frac{5g}{7(R-r)}\left(\sin\vartheta-\frac{2R\beta}{5g}\right).$$

Innen leolvashatjuk, hogy általában létezik egy olyan

$$\vartheta_0=\arcsin\frac{2R\beta}{5g}$$

szög, amelynek megfelelő helyzetben a golyó tömegközéppontja egyensúlyban van.

Megjegyzés: Ha ebből a helyzetből indítjuk a golyót, akkor a tömegközéppontja nyugalomban marad, a tömegközéppont körüli forgásának szögsebessége pedig (a csúszásmentes gördülés feltételének megfelelően)

$$\omega_{\text{golyó}} = \frac{R}{r} \cdot \beta t$$

módon növekszik. Ehhez a megfelelően nagy súrlódáson kívül a szöggyorsulás se lehet akármilyen nagy.

Mivel a feladat szövegében az szerepel, hogy a β szöggyorsulás értéke kicsi, ezért jogos feltennünk, hogy a golyó tömegközéppontjának maximális elmozdulása is kicsi, vagyis indokolt a $\sin\vartheta \approx \vartheta$ közelítés használata. A (6) mozgásegyenlet ebben a közelítésben a

$$\beta_{\text{t}} = -\frac{5g}{7(R-r)}\left(\vartheta - \frac{2R\beta}{5g}\right) = -\Omega^2 \cdot (\vartheta - \vartheta_0)$$

alakú, amelyből látszik, hogy a golyó tömegközéppontja jó közelítéssel harmonikus rezgőmozgást végez a ϑ_0 szöghelyzet körül, és a rezgésideje:

(7)
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}.$$

A rezgőmozgás szög-amplitúdója (mivel $\vartheta = 0$ helyzetből indult a golyó) jó közelítéssel ϑ_0. Meglepő, hogy a rezgésidő akkor is a (7)-nek megfelelő érték, ha a gömb szöggyorsulása nulla, a gömb egyenletesen forog vagy áll, vagyis *a*) mindhárom kérdésére ugyanaz a válasz.

b) Legyen a plexigömb kezdeti állandó szögsebessége $\omega_{\text{gömb}}$. A tiszta gördülés miatt a gumigolyó ugyanabba az irányba forog, és a golyó szögsebessége:

$$\omega_{\text{golyó}} = \frac{R}{r}\omega_{\text{gömb}}.$$

(Ezt pl. (1)-ből olvashatjuk le, $\vartheta \equiv 0$ helyettesítéssel.)

A plexigömb megállításának pillanatában változó nagyságú $F_{\text{s}}(t)$ súrlódási erő kezd hatni a golyóra, ami valamekkora Δt idő alatt tiszta gördülést eredményez. A súrlódási erő (melynek átlagértékét jelöljük $\bar{F}$-sal) a golyó tömegközéppontjának valamekkora v_0 sebességet ad, míg a golyó szögsebességét ω_0 értékre csökkenti. A tiszta gördülési feltétel miatt: $v_0 = r\omega_0$.

Írjuk fel a súrlódási erő sebességet, illetve szögsebességet változtató hatását kifejező dinamikai egyenleteket:

$$\bar{F}\Delta t = mv_0 = mr\omega_0,$$

$$r\bar{F}\Delta t = \Theta \cdot \Delta\omega = \frac{2}{5}mr^2 \cdot (\omega_{\text{golyó}} - \omega_0) = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \left(\frac{R}{r}\omega_{\text{gömb}} - \omega_0\right).$$

A fenti egyenletekből $\bar{F}\Delta t$-t kiküszöbölve a tisztán gördülő golyó adataira

(8)
$$\omega_0 = \frac{2R}{7r}\omega_{\text{gömb}} \qquad \text{és} \qquad v_0 = \frac{2R}{7}\omega_{\text{gömb}}$$

adódik. Mivel ez az állapot (a plexigömb érdes felülete miatt) a gömb megállítása után igen rövid idővel bekövetkezik, feltehetjük, hogy az újra tiszta gördüléssel mozgó golyó lényegében a gömb legalján marad, elmozdulása a megcsúszás közben elhanyagolható.

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre juthatunk akkor is, ha a gömb megállítását követő rövid időre a golyó alatti felületet vízszintes, igen érdes síknak tekintjük. A rövid ideig ható súrlódási „erőlökés” megváltoztatja a golyó mechanikai energiáját és lendületét, de nem változtatja meg a golyónak a gömbbel érintkező pontjára vonatkoztatott *perdületét:*

$$\frac{2}{5}mr^2 \cdot \omega_{\text{golyó}} = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \omega_0 + mv_0 \cdot r.$$

Ez a feltétel $v_0 = r\omega_0$ és $r\omega_{\text{golyó}} = R\omega_{\text{gömb}}$ miatt (8)-cal egyenértékű.

A golyó további (tisztán gördülő) mozgása során felhasználhatjuk az energiamegmaradás törvényét, és felírjuk a tömegközéppontra vonatkozó mozgásegyenletet a golyó pályájának bármelyik, például a legfelső pontjára is:

$$mg - K = m\frac{v_1^2}{R-r},$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = mg \cdot 2(R-r) + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2,$$

ahol v_1 és ω_1 a golyó sebessége, illetve szögsebessége a pálya legfelső pontjában ($v_1 = r\omega_1$), K pedig a golyó és a plexigömb között fellépő nyomóerőt jelöli ebben a helyzetben.

A megfelelő mennyiségek behelyettesítése után a kényszererőt így fejezhetjük ki a plexigömb kezdeti szögsebességével:

$$K = \frac{4}{49}\,\frac{mR^2\omega_{\text{gömb}}^2}{R-r} - \frac{27}{7}\,mg.$$

A gumigolyó akkor juthat fel a legfelső pontba, ha a K kényszererő még a pálya legfelső pontjában sem negatív ($K \geq 0$), ami a következő feltételt adja a gömb kezdeti szögsebességére:

$$\omega_{\text{gömb}} \geq \frac{3}{2R}\sqrt{21\,(R-r)g}.$$