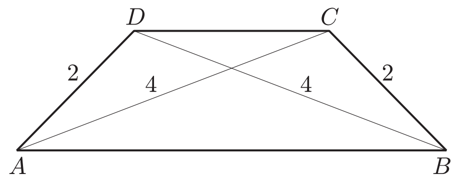
I. megoldás. Az ABC és ABD háromszögek egybevágóak, mert AB oldaluk közös, másik két-két oldaluk pedig egyenlő. Ezért $ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = \alpha$. Mivel AC és BD metszik egymást, C és D az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkedik el. A szögek egyenlősége miatt ezért C és D az AB szakasz α szöghöz tartozó két látókoríve közül ugyanazon van rajta, tehát $ABCD$ húrnégyszög.



Ptolemaiosz tétele (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I.,* 1259. feladat) szerint bármely húrnégyszög két-két szemközti oldala szorzatának összege megegyezik az átlók szorzatával. Esetünkben tehát

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD,$$

azaz

$$CD = \frac{AC \cdot BD - AD \cdot BC}{AB} = \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 2}{AB} = \frac{12}{AB}\,.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt $AB > AC - BC = 4 - 2 = 2$ és $AB < AC + BC = 4 + 2 = 6$. Ezen feltételek teljesülése esetén $2 < CD < 6$ is fennáll, s ilyenkor létezik az $ABCD$ négyszög.

II. megoldás. Az $ABCD$ húrnégyszög szimmetrikus trapéz, mert két szemközti oldala, AD és BC egyenlő. Ezért $BAD\sphericalangle + CDA\sphericalangle = 180°$, vagyis $\cos BAD\sphericalangle + \cos CDA\sphericalangle = 0$. A koszinusztételt az ABD, illetve az ACD háromszögekre felírva

$$\cos BAD\sphericalangle = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} \quad \text{és} \quad \cos CDA\sphericalangle = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2 \cdot AD \cdot CD}\,,$$

tehát

$$\frac{AB^2 + 2^2 - 4^2}{4 \cdot AB} + \frac{2^2 + CD^2 - 4^2}{4 \cdot CD} = 0.$$

Ebből átszorzás és rendezés után az

$$(AB + CD)(AB \cdot CD - 12) = 0$$

egyenlőséget kapjuk. Mivel $AB + CD \neq 0$, azért $(AB \cdot CD - 12) = 0$, vagyis $CD = 12/AB$.