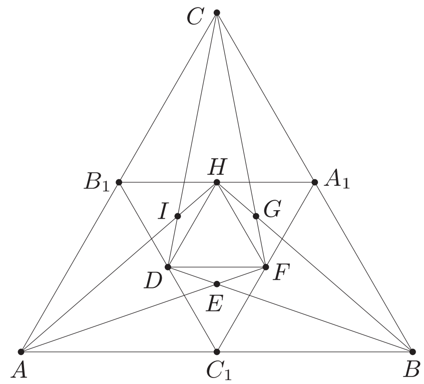
Megoldás. A három tetraéder alapja az *ábra* jelöléseivel az ABH, BDC és ACF háromszög, negyedik csúcsuk pedig egybeesik a szabályos tetraéder O csúcsával. A három tetraéder közös része tehát a $DEFGHI$ hatszög alapú O csúcsú gúla, melynek magassága megegyezik az eredeti tetraéder magasságával, így a térfogataik aránya helyett elegendő az alapterületeik arányát vizsgálni.



A hatszög területét négy háromszög területére bontjuk: $T_{DEFGHI} = T_{DFH\triangle} + T_{DFE\triangle} + T_{FHG\triangle} + T_{HDI\triangle}$, ahol az utóbbi három terület egyenlő, a háromszögek egybevágósága miatt.

Mivel a $DFH\triangle$ oldalai $A_1B_1C_1\triangle$ középvonalai, ennek az oldalai pedig az $ABC\triangle$ középvonalai, így

$$T_{DFH\triangle} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot T_{ABC\triangle} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC\triangle}.$$

Az AB és DF egyenesek távolsága, ami egyben a $DFC_1\triangle$ magassága, hasonlóan az $ABC\triangle$ magasságának negyed része, és ez egyben az $ABE\triangle$ és $DFE\triangle$ magasságának összege: $m_{ABE\triangle} + m_{DFE\triangle} = \dfrac{1}{4} m_{ABC\triangle}$. A $DFE\triangle$ és $ABE\triangle$ hasonlóak, a hasonlóság aránya:

$$\frac{DF}{AB} = \frac{1}{4} = \frac{m_{DEF\triangle}}{m_{ABE\triangle}}, \quad \text{így}$$

$$m_{ABE\triangle} + m_{DFE\triangle} = 4 \cdot m_{DFE\triangle} + m_{DFE\triangle} = 5 m_{DFE\triangle} = \frac{1}{4} m_{ABC\triangle},$$

amiből

$$m_{DFE\triangle} = \frac{1}{20} m_{ABC\triangle},$$

$$T_{DFE\triangle} = DF \cdot m_{DFE\triangle} = \frac{1}{4} AB \cdot \frac{1}{20} m_{ABC\triangle} = \frac{1}{80} T_{ABC\triangle}.$$

Összegezve a területeket:

$$T_{DEFGHI} = T_{DFH\triangle} + 3 \cdot T_{DFE\triangle} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC\triangle} + \frac{3}{80} T_{ABC\triangle} = \frac{1}{10} \cdot T_{ABC\triangle}.$$

Így a magasságok egyenlősége miatt a három tetraéder közös részének térfogata is $1/10$ része a tetraéder térfogatának.