I. megoldás. Legyen a háromszög területe T. Ekkor tudjuk, hogy $2T = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta$. A koszinusztétel szerint $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, amit átrendezve és a feltételt felhasználva a feltételt kapjuk, hogy

$$2b^2 = a^2 + c^2 = b^2 + 2ac\cos\beta, \quad \text{azaz} \quad \cos\beta = \frac{b^2}{2ac}.$$

Mivel $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$, a területképletet is használva

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{b^2}{2ac\sin\beta} = \frac{b^2}{4T}$$

adódik.

Ugyanígy kapjuk az a, illetve c oldalra felírt koszinusztételek átrendezéséből és a megfelelő területképletekből, hogy

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc\sin\alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4T} \quad \text{és} \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab\sin\gamma} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4T}.$$

A bizonyítandó állítás tehát

$$2 \cdot \frac{b^2}{4T} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4T} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4T}.$$

Ez pedig nyilván igaz.

II. megoldás. Írjuk fel a koszinusztételt a háromszög mindhárom oldalára, s a kapott kifejezéseket helyettesítsük be a feladat feltételéül adott egyenlőségbe. Ezek szerint

$$2(a^2 + c^2) = 2(b^2 + 2ac\cos\beta) = (b^2 + c^2 - a^2 + 2bc\cos\alpha) + (a^2 + b^2 - c^2 + 2ab\cos\gamma).$$

Ezt átrendezve, majd abc-vel osztva kapjuk, hogy

$$2ac\cos\beta = bc\cos\alpha + ab\cos\gamma,$$

$$\frac{2\cos\beta}{b} = \frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\gamma}{c}.$$

Az oldalak helyére az általánosított szinusztétel szerinti $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ és $c = 2R\sin\gamma$ kifejezéseket beírva (ahol R a háromszög köré írható kör sugara)

$$\frac{2\cos\beta}{2R\sin\beta} = \frac{\cos\alpha}{2R\sin\alpha} + \frac{\cos\gamma}{2R\sin\gamma},$$

amit $2R$-rel megszorozva és felhasználva, hogy $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ éppen a bizonyítandó

$$2\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma$$

egyenlőséget kapjuk.