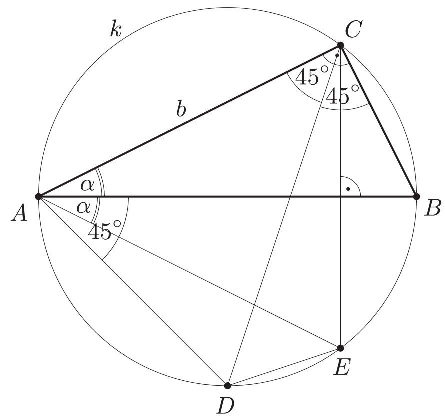
I. megoldás. Legyen a b befogó C-től különböző végpontja A, a háromszög harmadik csúcsa pedig B. Ekkor Thalész tételének megfordításából következik, hogy AB a körülírt k kör átmérője. Egy kör középpontjából a kör tetszőleges húrjára állított merőleges felezi a húrt, ezért CE és AB merőlegességéből következik, hogy C és E az AB-re szimmetrikusan helyezkedik el, tehát $CAB\sphericalangle = EAB\sphericalangle = \alpha$. Mivel b a nem kisebb befogó, azért $\alpha \le 45^\circ$. A CD szakasz szögfelező, így $ACD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 45^\circ$, a kerületi szögek tétele szerint pedig $BAD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 45^\circ$. Tehát

$$DAC\sphericalangle = BAD\sphericalangle + BAC\sphericalangle = 45^\circ + \alpha,$$

továbbá

$$EAD\sphericalangle = BAD\sphericalangle - BAE\sphericalangle = 45^\circ - \alpha.$$



Az AB átmérőjű k kör nemcsak az ABC, hanem az ADC és az AED háromszögeknek is köréírt köre, ezért az általánosított szinusztétel szerint

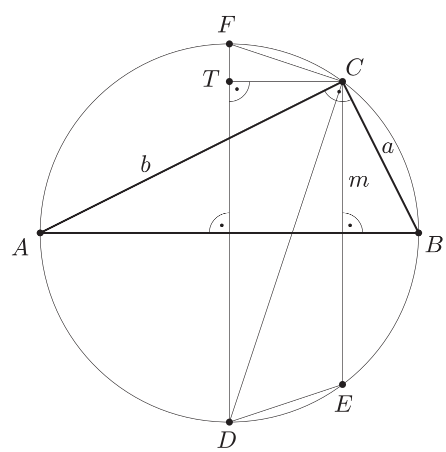
$$CD = AB\sin(45^\circ + \alpha) \quad \text{és} \quad DE = AB\sin(45^\circ - \alpha).$$

Tehát

$$\begin{aligned} CD + DE &= AB\big(\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)\big) = \\ &= 2AB\sin 45^\circ \cos\alpha = AB\sqrt{2}\cos\alpha = b\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $BC = a$, a háromszög C-hez tartozó magasságának hossza pedig m. Ekkor Pithagorasz tétele szerint $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ és $m = ab/\sqrt{a^2 + b^2}$, hiszen az ABC háromszög területének kétszeresével egyezik meg az ab és az $m\sqrt{a^2 + b^2}$ szorzat is.



Az I. megoldásban láttuk, hogy E-nek az AB-re vonatkozó tükörképe C. Mivel CD szögfelező, D felezi az AB ívet. Tehát ha D-nek az AB-re vonatkozó tükörképe F, akkor DF is átmérője k-nak, a $DFCE$ négyszög pedig (esetleg elfajuló) szimmetrikus trapéz. Ezért $DE = CF$. Ha a C-ből DF-re bocsájtott merőleges talppontja T, akkor

$$TF = (DF - EC)/2$$

és $DT = DF - TF = (DF + EC)/2$.

Thalész tétele szerint $DCF\sphericalangle = 90°$. A CDF derékszögű háromszög átfogója $DF = AB = \sqrt{a^2+b^2}$, a befogótétel szerint tehát

$$CD = \sqrt{DF \cdot DT} = \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + ab} = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}\,,$$

és (felhasználva, hogy $b \geq a$, azaz $b - a \geq 0$)

$$CF = \sqrt{DF \cdot TF} = \sqrt{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} - ab} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{2}} = \frac{b-a}{\sqrt{2}}\,.$$

Tehát

$$CD + DE = CD + CF = \frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{b-a}{\sqrt{2}} = b\sqrt{2}\,,$$

ami épp a bizonyítandó állítás.