Megoldás. Vegyük észre, hogy az $f \equiv 0$ függvény teljesíti a feladatban leírt feltételeket. Megmutatjuk, hogy ezen kívül nincs más ilyen tulajdonságú függvény.

A (iv) feltételből $x = y = z = 0$ helyettesítéssel adódik, hogy $3f(0) = f(0)^3$, azaz $f(0)\big(f(0)^2 - 3\big) = 0$. Innen $f(0) = 0$ vagy $f(0)^2 = 3$ következik, ám az utóbbi lehetőség ellentmond (ii)-nek, így $f(0) = 0$. Ezek után $y = -x$ és $z = 0$ helyettesítéssel (iv) $f(x) + f(-x) = 0$ alakot ölt, tehát $f(x) = -f(-x)$ teljesül minden x egész számra, vagyis f páratlan függvény. Végül az $y = x$ és $z = -2x$ helyettesítéssel (iv)-ből azt kapjuk, hogy $2f(x) - f(2x) = -f(x)^2 f(2x)$, azaz

$$2f(x) = f(2x)\big(1 - f(x)^2\big). \tag{1}$$

Tegyük fel tehát, hogy $f \not\equiv 0$, azaz van olyan x egész, amire $f(x) \neq 0$. Ekkor (1) bal oldala nemnulla, így a jobb oldal sem lehet zérus, tehát $\big|f(x)\big| \neq 1$ teljesül minden olyan x egészre, ami nem gyöke f-nek. Más szóval az f függvény nem veszi fel az 1 és -1 értékek egyikét sem. Láttuk, hogy $f(0) = 0$, ezért (iii) miatt $\big|f(n)\big| < 1$ teljesül minden n egészre. Ha tehát $0 < \big|f(x)\big| < 1$, akkor (1) miatt

$$\big|f(2x)\big| = \left|\frac{2f(x)}{1 - f(x)^2}\right| = \frac{|2f(x)|}{\big|1 - f(x)^2\big|} > \frac{2\big|f(x)\big|}{1} = 2\big|f(x)\big|$$

adódik, azaz $\big|f(2^n x)\big| > 2^n \big|f(x)\big|$, ha $n > 1$ egész. Legyen n olyan pozitív egész, amire $2^n > \dfrac{1}{|f(x)|}$ teljesül. Ekkor

$$\big|f(2^n x)\big| > 2^n \big|f(x)\big| > \frac{1}{\big|f(x)\big|}\big|f(x)\big| = 1,$$

márpedig ez ellentmond a fenti megfigyelésnek, ami szerint $|f| < 1$. Tehát $f \equiv 0$ az egyedüli olyan függvény, ami teljesíti az (i)–(iv) feltételeket. $\square$

Megjegyzés. Többen észrevették, hogy a feladat (iv) feltétele teljesül a tangens függvényre. Ez a megfigyelés, mint láttuk, nem szükséges a megoldáshoz, de ennek ismerete rávilágít annak ötletére. Ha ugyanis az f függvényre fennáll a (iv) tulajdonság, akkor $\alpha := \operatorname{arcctg}\big(f(1)\big)$ választással tetszőleges n pozitív egészre $f(n) = \operatorname{tg}(n \cdot \alpha)$ adódik. Mivel $\operatorname{tg}\big(\pm\frac{\pi}{2}\big)$ nem értelmes, azért $n \cdot \alpha = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ semmilyen egész n, k esetén sem teljesülhet, így olyan egész m sem létezik, amire $\operatorname{tg}(m\alpha) = \pm 1$ áll. A (iii) feltétel miatt ekkor $|f| < 1$, márpedig ha $\operatorname{tg}(\alpha) \neq 0$, akkor az α alkalmas többszörösének tangense 1-nél nagyobb abszolút értékű lesz.