Megoldás. Tekintsük az $1, 1+a, 1+2a, 1+3a, \ldots$, illetve az $1, 1+b, 1+2b, 1+3b, \ldots$ sorozatokat. E két sorozat bármelyikére igaz, hogy két szomszédos elemének különbsége a vagy b, ezért semelyik két szomszédos elem sem lehet a H_1 és H_2 halmazok közül ugyanabban. Más szóval mindkét sorozat felváltva tartalmaz H_1 és H_2-beli elemeket. Azt kaptuk tehát, hogy az $1+ka$ és az $1+\ell b$ egészek pontosan akkor vannak ugyanabban a halmazban, ha k és ℓ paritása megegyezik (hiszen mindkét sorozat első eleme 1).

Legyen n, illetve m az a, illetve b kanonikus alakjában a 2 prímtényező kitevője, azaz $a = 2^n a'$ és $b = 2^m b'$, ahol a', illetve b' páratlan számok. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $n \geq m$ teljesül. Tekintsük az $x := 1+2^n a' b'$ számot. Mivel $x = 1+b'a$ ugyanabban a halmazban van, mint $x = 1+a'2^{n-m}b$, a fenti megfigyelésünkből az adódik, hogy b' és $a'2^{n-m}$ paritása megegyezik, vagyis $a'2^{n-m}$ páratlan, ami csak úgy lehetséges, ha $n-m=0$, azaz ha $n=m$. Azt kaptuk tehát, hogy ha lehetséges a pozitív egészeket két halmaz uniójára bontani a feladatban leírt módon, akkor a és b kanonikus alakjában a 2 prímtényező ugyanazon a kitevőn szerepel.

A megoldást annak megmutatásával fejezzük be, hogy ebben az esetben (tehát ha $n=m$) megadható a kívánt felbontás. Legyen ugyanis

$$H_1 := \left\{ k \in \mathbb{Z} \colon k > 0 \text{ és } \left\lfloor \frac{k}{2^n} \right\rfloor \text{ páratlan} \right\}, \quad \text{illetve}$$

$$H_2 := \left\{ k \in \mathbb{Z} \colon k > 0 \text{ és } \left\lfloor \frac{k}{2^n} \right\rfloor \text{ páros} \right\}.$$

[2]Ez a választás megfelelő, hiszen ha $x-y=a$, akkor $x=y+a$, tehát

$$\left\lfloor \frac{x}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+a}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + \frac{a}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + a' \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} \right\rfloor + a'.$$

Mivel a' páratlan, ez azt jelenti, hogy x és y egyike H_1-beli, a másik pedig H_2 eleme. Hasonlóan látható, hogy ha két pozitív egész különbsége b, akkor azok különböző halmazokból valók:

$$x-y=b \Rightarrow x=y+b \Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+b}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + \frac{b}{2^n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} + b' \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y}{2^n} \right\rfloor + b'.$$

Azt kaptuk tehát, hogy pontosan akkor létezik a feladatban leírt felbontás, ha a és b prímtényezős felbontásában a 2 prím ugyanazon a kitevőn szerepel. $\square$

Megjegyzések. 1. Könnyen látható, hogy ha a és b pontosan ugyanazokkal a 2-hatványokkal osztható, akkor a pozitív egészeknek a feladat szerinti bármely felbontása úgy áll elő, hogy a 2^n szerinti maradékosztályok elemeit „felváltva” tesszük H_1-be és H_2-be.

2. Ha a H_1-ben, illetve H_2-ben fellépő különbségekből nem két számot (a-t és b-t) tiltunk meg, hanem többet, akkor a megoldásban leírt módszerrel igazolható, hogy pontosan akkor létezik a kívánt partíció, ha a tiltott számok mindegyikének kanonikus alakjában ugyanazzal a kitevővel szerepel a 2 prímosztó. A lehetséges halmazokba osztások itt is pontosan úgy kaphatók, ahogy azt az 1. megjegyzésben leírtuk.

3. Nagy Dániel azt figyelte meg, hogy három halmaz (H_1, H_2 és H_3) uniójára mindig felbonthatók a pozitív egészek úgy, hogy semelyik halmazon belül se lépjen fel a vagy b különbség. Ez a tény a „mohó színezés” erre az esetre történő alkalmazásával igazolható: sorra eldöntjük az $1, 2, 3, \ldots$ számokról, hogy a H_i halmazok közül melyikbe tesszük. Konkrétan: a soron következő k pozitív egészhez úgy választjuk a k-t tartalmazó halmazt, hogy k ne legyen egy halmazban a korábban már valamelyik halmazba besorolt $(k-a)$ és $(k-b)$ számok egyikével sem. Mivel három halmazunk van, ezt mindig megtehetjük. Ezzel a módszerrel minden pozitív egészt a H_1, H_2 és H_3 halmazok közül pontosan egyhez rendelünk, és a konstrukcióból adódóan az így kapott felbontás rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Az is könnyen látható, hogy ha a 2. megjegyzésben leírtak szerint több tiltott számunk van (mondjuk ℓ), akkor a pozitív egészek halmaza bizonyosan felbontható $\ell+1$ halmaz uniójára a feladatban leírt módon.

[2] Egy x szám $\lfloor x \rfloor$ alsó egész része (vagy egész része) az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél.