Megoldás. A feladat szövegéből adódóan n és k pozitív egészek. Világos, hogy $n = 1$ esetén $S = k$, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $n \geq 2$. A táblázat minden sorában a beírt számok összege $1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, így a táblázatbeli számok összege $\frac{1}{2}nk(k+1)$. A k oszlop valamelyikében tehát az összeg legalább $\frac{1}{2}n(k+1)$, vagyis $S \geq \frac{1}{2}n(k+1)$. Ebből

$$S \geq \left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil$$ [1]

következik, tekintve, hogy S a definíciójából adódóan egész szám. Megmutatjuk, hogy $n \geq 2$ esetén ez lesz az S pontos értéke. Ehhez azt kell igazolni, hogy létezik olyan táblázatkitöltés, amiben minden oszlopösszeg legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil .$$

Ha n páros, akkor könnyű ilyet találni: a páratlanodik sorokba növekvő, a páros sorszámúakba csökkenő sorrendben írjuk be az egészeket. Ezáltal az i-edik oszlopösszeg

$$\frac{n}{2}i + \frac{n}{2}(k+1-i) = \frac{1}{2}n(k+1)$$

lesz. Ha n páratlan (és $n \geq 3$), akkor is megtehetjük, hogy az első $n-3$ sort a fentiek szerint töltjük ki (hiszen páros számú sorról van szó), és ezáltal minden oszlopban az első $n-3$ elem összege $\frac{1}{2}(n-3)(k+1)$ lesz. Ahhoz tehát, hogy minden oszlopban az összeg legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil$$

legyen, az szükséges, hogy a táblázat utolsó három sorát úgy töltsük ki, hogy minden oszlop utolsó három elemének összege legfeljebb

$$\left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) \right\rceil - \frac{1}{2}(n-3)(k+1) = \left\lceil \frac{1}{2}n(k+1) - \frac{1}{2}(n-3)(k+1) \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2}(k+1) \right\rceil$$

legyen. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az utolsó 3 sorba egy a feladatban leírt $3 \times k$ méretű táblázatot kell elhelyeznünk. A továbbiakban tehát az $n = 3$ esetre szorítkozunk.

Ha $k = 2m+1$ páratlan, azaz $S = \frac{3(k+1)}{2} = 3(m+1)$, akkor az alábbi módon kitöltött táblázat megfelel a célnak:

1	2	$\ldots$	i	$\ldots$	$m+1$	$m+2$	$\ldots$	j	$\ldots$	$2m+1$
$2m+1$	$2m-1$	$\ldots$	$2m+3-2i$	$\ldots$	1	$2m$	$\ldots$	$4m+4-2j$	$\ldots$	2
$m+1$	$m+2$	$\ldots$	$m+i$	$\ldots$	$2m+1$	1	$\ldots$	$j-m-1$	$\ldots$	m

Ha pedig $k = 2m$ páros szám és

$$S = \left\lceil \frac{3(k+1)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{6m+3}{2} \right\rceil = 3m+2,$$

akkor például az alábbi módon tölthetjük ki a $3 \times k$ méretű táblázatot:

1	2	$\ldots$	i	$\ldots$	m	$m+1$	$\ldots$	j	$\ldots$	$2m$
$2m$	$2m-2$	$\ldots$	$2m+2-2i$	$\ldots$	2	$2m-1$	$\ldots$	$4m+1-2j$	$\ldots$	1
$m+1$	$m+2$	$\ldots$	$m+i$	$\ldots$	$2m$	1	$\ldots$	$j-m$	$\ldots$	m

Könnyen ellenőrizhető, hogy mindkét táblázatban minden sorban szerepel 1 és k között az összes egész, továbbá, hogy egyetlen oszlopösszeg sem nagyobb S-nél. $\square$