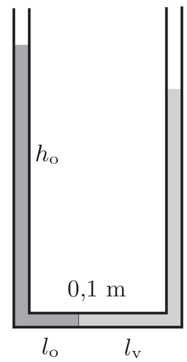
**I. megoldás.** Számoljuk ki először gyorsításmentes esetben a víz és az olaj elhelyezkedését! A kicsiny sűrűségkülönbség miatt feltételezhetjük, hogy a víz és az olaj elválasztó felülete az U alakú cső vízszintes részére esik, a függőleges szárakban pedig $h_\mathrm{v}$ magasan víz, illetve $h_\mathrm{o}$ magasan olaj található (*1. ábra*). Mivel a két folyadék teljes hossza 0,4 m, a vízszintes szakasz pedig (ha a hajlatok térfogatát elhanyagoljuk) 0,1 m hosszú, fennáll, hogy $h_\mathrm{v}+h_\mathrm{o}=0{,}3$ m, azaz

$$h_\mathrm{o}=0{,}3-h_\mathrm{v}. \tag{1}$$

(Itt és a továbbiakban az SI mértékegységeket az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki.)



*1. ábra*

Egyensúlyban a két függőleges szárban a hidrosztatikai nyomás megegyezik:

$$\varrho_\mathrm{o}\cdot g\cdot h_\mathrm{o}=\varrho_\mathrm{v}\cdot g\cdot h_\mathrm{v},$$

ahonnan (1) felhasználásával:

$$800\,(0{,}3-h_\mathrm{v})=1000\,h_\mathrm{v}.$$

Ennek megoldásából (három tizedesjegy pontossággal számolva)

$$h_\mathrm{v}=0{,}133,\qquad h_\mathrm{o}=0{,}166,$$

a víz és az olaj szintkülönbségére (a levegővel érintkező folyadékfelszínek magasságkülönbségére) pedig

$$\Delta h_0=h_\mathrm{v}-h_\mathrm{o}=-0{,}033\ \mathrm{m},$$

vagyis kb. 3,3 cm adódik. (A nullás index a gyorsításmentes esetre utal, a negatív előjel pedig azt fejezi ki, hogy ebben az esetben az olaj áll magasabban.) A vízszintes csőszárban

$$l_\mathrm{o}=0{,}2-h_\mathrm{o}=0{,}033$$

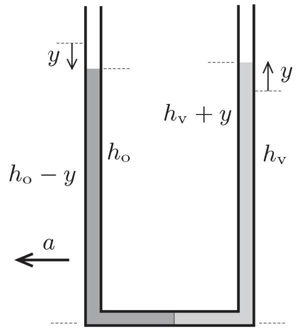
hosszan olaj,

$$l_\mathrm{v}=0{,}2-h_\mathrm{v}=0{,}067$$

méternyi darabon pedig víz található.

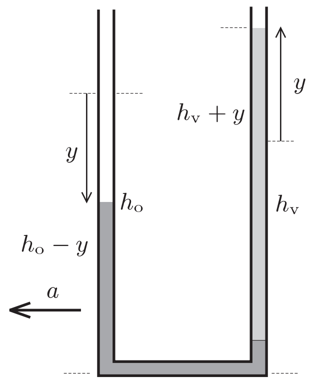
A rendszer gyorsítása során a jobb oldali ágban a víz megemelkedik valamekkora $y$ értékkel, a bal oldali ágban pedig az olaj lesüllyed (vagy akár el is tűnhet ebből a szárból). Emiatt a vízszintes csőszakasz jobb oldali végénél nagyobb, a bal oldali végénél pedig kisebb lesz a nyomás, mint a fentebb számolt egyensúlyi esetben. A nyomáskülönbségből számolható eredő vízszintes erő hozza létre a vízszintes csőszárban levő folyadék gyorsulását. A továbbiakban három esetet kell megkülönböztessünk.

1. Nem túl nagy gyorsulásnál a folyadékszintek csak kicsit változnak meg, az olaj részben a bal oldali függőleges szárban, részben a vízszintes csőszár egyik darabjában helyezkedik el (*2. ábra*). Ez $0<y<0{,}067$ vízszintemelkedések esetén teljesül.



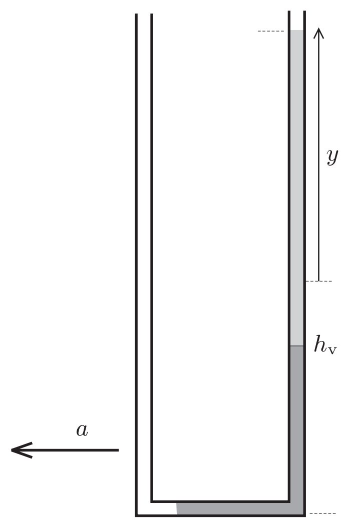
*2. ábra*

2. Közepesen nagy gyorsulásoknál már a jobb oldali függőleges szárba is kerül olaj, de a bal oldali függőleges szár még nem ürül ki teljesen (*3. ábra*). Ennek feltétele: $0{,}067 < y < 0{,}167$.




*3. ábra*

3. Nagyon nagy gyorsulásoknál már csak a vízszintes csőszár egy részében és a jobb oldali függőleges szárban található olaj, a bal oldali függőleges szár teljesen kiürül (*4. ábra*). Ez az eset akkor áll fenn, ha $0{,}167 < y < 0{,}267$.




*4. ábra*

Határozzuk meg a szintkülönbségeket a vízszintes folyadékszakaszra felírt mozgásegyenlet felhasználásával! Az 1. esetben a jobb oldali függőleges csőszár alján $\varrho_\mathrm{v} gy$-nal megnő, a bal oldali szár alján pedig $\varrho_\mathrm{o} gy$ értékkel lecsökken a nyomás a gyorsításmentes (egyensúlyi) helyzethez képest. Ez a két nyomásváltozás együttesen

$$F = (\varrho_\mathrm{v} + \varrho_\mathrm{v}) gyA$$

erőt eredményez a vízszintes folyadékra ($A$ a cső keresztmetszete). A mozgásegyenlet:

$$(\varrho_\mathrm{o} + \varrho_\mathrm{v}) gyA = A\big[\varrho_\mathrm{o}(l_\mathrm{o} + y) + \varrho_\mathrm{v}(l_\mathrm{v} - y)\big] a.$$

Ez (az ismert és kiszámított adatok behelyettesítése után)

$$1{,}8\, y = \big[0{,}8(0{,}033 + y) + 0{,}067 - y\big] \frac{a}{g}$$

alakra hozható, s ebből a $\Delta h = 2y + \Delta h_0$ szintkülönbség kiszámítható:

(2) $$\Delta h = 0{,}3 \cdot \frac{3\frac{a}{g} - 1}{\frac{a}{g} + 9}.$$

A fenti képlet érvényességének feltétele $0 < y < 0{,}067$; ez pedig

(2$a$) $$0 < \frac{a}{g} < 1{,}5$$

esetén teljesül.

A 2. esetben (lásd a 3. ábrát) a vízszintes csődarabban levő $0{,}1 \cdot 800 \cdot A$ tömegű olajat a jobb oldali szárban levő 0,2 m magas vízoszlop és a $h_\mathrm{v} + y - 0{,}2$ magasságú olaj nyomása, valamint a bal oldali szárban levő $h_\mathrm{o} - y$ magas olaj nyomásának különbsége gyorsítja:

$$0{,}1 \cdot 800\, A \cdot a = \left[0{,}2 \cdot 1000 + 800 \cdot (h_\mathrm{v} + y - 0{,}2) - 800 \cdot (h_\mathrm{o} - y)\right] gA.$$

Ebből $y = 0{,}05\,\frac{a}{g} - 0{,}0083$, illetve

$$\Delta h = 0{,}05 \cdot \frac{a}{g} - 0{,}05 \tag{3}$$

adódik. A fenti képlet akkor érvényes, ha $0{,}067 < y < 0{,}167$, ez pedig

$$1{,}5 < \frac{a}{g} < 3{,}5 \tag{3a}$$

gyorsulások esetén teljesül.

Végül vizsgáljuk meg a 4. ábrának megfelelő lehetőséget! A szintkülönbség most éppen a jobb oldali folyadékoszlop magassága: $\Delta h = h_\mathrm{v} + y$, melyből 0,2 méternyi a víz, a többi $\Delta h - 0{,}2$ pedig olaj. A vízszintes csődarabban levő olaj hossza nyilván $0{,}4 - \Delta h$, így a mozgásegyenlet:

$$\left[0{,}2 \cdot 1000 + (\Delta h - 0{,}2) \cdot 800\right] gA = 800 \cdot A(0{,}4 - \Delta h)a,$$

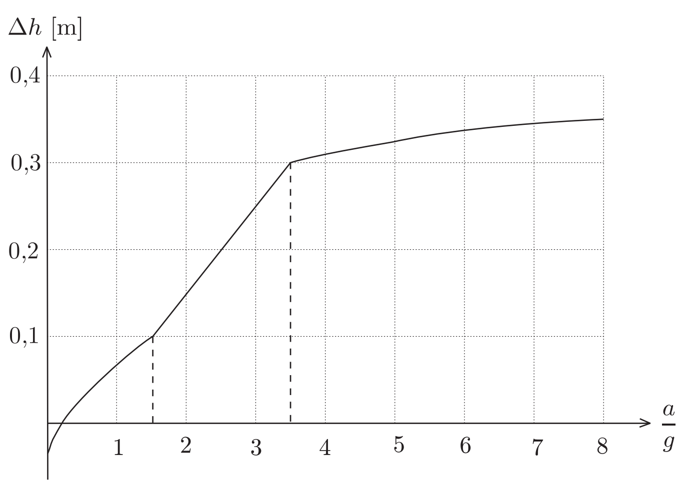
amelyből a szintkülönbség kifejezhető:

$$\Delta h = \frac{0{,}4\frac{a}{g} - 0{,}05}{1 + \frac{a}{g}}. \tag{4}$$

A fenti összefüggés érvényességi köre $(3a)$ felső határától tetszőlegesen nagy gyorsulásokig terjed, vagyis

$$3{,}5 < \frac{a}{g} < \infty. \tag{4a}$$

Eredményeinket az *5. ábrán* látható grafikon foglalja össze, mely a (2), (3), (4) képletek felhasználásával és a $(2a)$, $(3a)$, $(4a)$ feltételek figyelembe vételével rajzolható meg. A grafikon egy hiperbola-ívből, egy egyenes szakaszból és egy másik hiperbola-ívből áll. Ezek a görbék folytonosan csatlakoznak egymáshoz, de a csatlakozási pontban a meredekségük ugrásszerűen megváltozik.



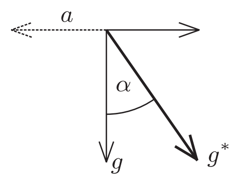

*5. ábra*

**II. megoldás.** Írjuk le a jelenséget az U alakú csővel együttmozgó, balra gyorsuló koordináta-rendszerből! Ebben a vonatkoztatási rendszerben a függőleges $mg$ gravitációs erő mellett minden testre hat még egy vízszintes, jobbra mutató, $ma$ nagyságú „tehetetlenségi erő” is. Ezen két erő eredője éppen olyan, mintha a gravitációs gyorsulás

$$g^* = \sqrt{g^2 + a^2}$$

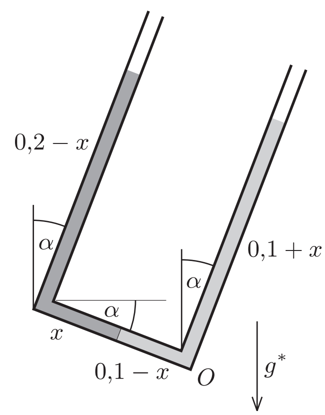
nagyságú lenne, és az iránya a valódi függőlegessel $\alpha$ szöget zárna be (*6. ábra*), ahol

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}. \tag{5}$$




*6. ábra*

Határozzuk meg a csőben levő folyadékok egyensúlyi helyzetét abban az esetben, amikor az olaj és a víz határfelülete az U alakú cső alsó, összekötő szakaszára esik. Írjuk fel a hidrosztatikai nyomások egyensúlyi feltételét mondjuk a *7. ábrán* látható $O$ pontra!




*7. ábra*

Az ábra jelöléseit használva (és a hosszúságokat méterben mérve, de az SI mértékegységeket az egyszerűség kedvéért lehagyva) mondhatjuk:

$$\varrho_\mathrm{v} g^*(0{,}1+x)\cos\alpha = \varrho_\mathrm{v} g^*(0{,}1-x)\sin\alpha +$$

$$+\,\varrho_\mathrm{o} g^* x\sin\alpha + \varrho_\mathrm{o} g^*(0{,}2-x)\cos\alpha.$$

A sűrűségadatok behelyettesítése és $\cos\alpha$-val való osztás után kapjuk:

$$0{,}1+x = (0{,}1-x)\operatorname{tg}\alpha + 0{,}8\,x\operatorname{tg}\alpha + 0{,}8(0{,}2-x).$$

Ebből (5) felhasználásával az alsó szárban levő olaj hosszára

$$x = \frac{0{,}3+0{,}5\frac{a}{g}}{\frac{a}{g}+9},$$

a folyadékok szintkülönbségére

$$\Delta h = (0{,}1+x)-(0{,}2-x) = \frac{0{,}9\frac{a}{g}-0{,}3}{\frac{a}{g}+9}$$

adódik, összhangban az I. megoldás (2) képletével. Ez az összefüggés csak addig érvényes, amíg $x<0{,}1$ (vagyis amíg az olaj még nem folyik át a jobb oldali csőszárba); ez pedig $\dfrac{a}{g}<1{,}5$-re teljesül; egyezően az I. megoldás ($2a$) feltételével.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk meg a (3) és (4) összefüggéseket és ($3a$), ($4a$) feltételeket is.

*Megjegyzés.* A megoldás során feltételeztük, hogy a cső keresztmeszete elegendően kicsi ahhoz, hogy az olajat és a vizet „folyadékszál” alakban tartsa, ne engedje összekeveredni azokat. Ez azonban csak kapillárisokra igaz, az $1\ \mathrm{cm}^2$-es cső pedig nem tekinthető annak. A valóságban az olaj átfolyhat a víz felett a vízszintes csőben, tehát a folyamat a fentebb leírtaktól eltérő módon megy végbe. Ha a megadottnál kisebb keresztmetszetű csövet választunk (a keresztmetszet a számolásból kiesett), akkor érvényesnek vélhetjük a fenti megoldásokat. Sajnos a helyzet még ekkor sem egyszerű! Az olaj átfolyását a kapillaritás akkor akadályozhatja meg, ha a folyadékfelszíneken és a határfelületen a görbületi nyomás összemérhető a hidrosztatikai nyomásokkal; ekkor pedig a kapilláris jelenségeket is figyelembe kellene vegyük a megoldásban.