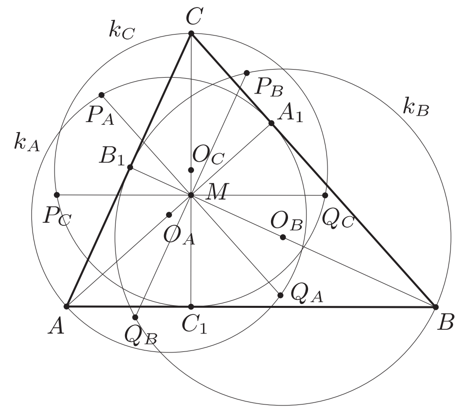
**Megoldás.** Az *1. ábra* jelöléseit felhasználva, azt kell igazolnunk, hogy

$$P_AQ_A = P_BQ_B = P_CQ_C.$$

Mivel $P_AQ_A \perp AA_1$ és $AA_1$ a $k_A$ körben átmérő, az $M$ felezi a $P_AQ_A$ szakaszt. Hasonlóan $M$ felezi a $P_BQ_B$ és $P_CQ_C$ szakaszokat is. Elegendő tehát igazolnunk, hogy $P_AM = P_BM = P_CM$.




*1. ábra*

Thalész tétele alapján az $AP_AA_1$, $BP_BB_1$ és $CP_CC_1$ háromszögek derékszögűek. A magasságtétel szerint

$$P_AM = \sqrt{AM \cdot MA_1}, \qquad P_BM = \sqrt{BM \cdot MB_1},$$

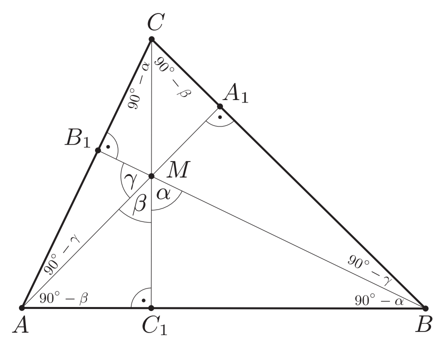
valamint

$$P_CM = \sqrt{CM \cdot MC_1}.$$

Így a bizonyítandó állítással ekvivalens, hogy

$$AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1 = CM \cdot MC_1.$$

Ezt hasonló háromszögek segítségével fogjuk bizonyítani.




*2. ábra*

A *2. ábra* jelöléseit felhasználva: $ABC\sphericalangle = \beta$, amiből $C_1CB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$ és $CMA_1\sphericalangle = AMC_1\sphericalangle = \beta$. Hasonlóan

$$B_1MA\sphericalangle = A_1MB\sphericalangle = \gamma \quad \text{és} \quad C_1MB\sphericalangle = B_1MC\sphericalangle = \alpha.$$

Ekkor $AMC_1\triangle \sim CMA_1\triangle$, ezért a megfelelő oldalak arányai egyenlők:

$$\frac{AM}{MC_1} = \frac{CM}{MA_1} \iff AM \cdot MA_1 = CM \cdot MC_1.$$

Ugyanakkor

$$BMC_1\triangle \sim CMB_1\triangle \implies \frac{BM}{MC_1} = \frac{CM}{MB_1} \iff BM \cdot MB_1 = CM \cdot MC_1.$$

Mindezekből következik, hogy $AM \cdot MA_1 = BM \cdot MB_1 = CM \cdot MC_1$, ami a bizonyítandó állítással ekvivalens.