**Megoldás.** A keresett számokat nevezzük röviden jónak. Tegyük fel, hogy $k$ jó. Ekkor $k < 10^m$ teljesül alkalmas $m$ pozitív egész számmal, ezért $k$-nak van olyan $n$ többszöröse, amelyre $10^m \le n < 2 \cdot 10^m$. Erre az $n$ számra $f(n)$ utolsó jegye 1-es, vagyis $f(n)$ nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel. Ezért a $k$ szám relatív prím a 10-hez. Az Euler–Fermat-tétel szerint így $9k$ osztója $10^t - 1$-nek, ahol $t = \varphi(9k)$. Ezért $k$ osztója a $t$-jegyű, csupa 1-esből álló $K = \dfrac{10^t - 1}{9}$ számnak is. Tehát

$$k \mid 19K = 20K - K = \underbrace{22\ldots2}_{t}0 - \underbrace{11\ldots1}_{t} = 2\underbrace{11\ldots1}_{t-2}09,$$

ahonnan

$$k \mid f(19K) = 90\underbrace{11\ldots1}_{t-2}2$$

adódik. Innen

$$k \mid L = f(19K) - 80K = 90\underbrace{11\ldots1}_{t-2}2 - \underbrace{88\ldots8}_{t}0 = 1\underbrace{22\ldots2}_{t-3}32,$$

majd

$$k \mid 2K - L = \underbrace{22\ldots2}_{t} - 1\underbrace{22\ldots2}_{t-3}32 = 10^{t-1} - 10$$

következik. Mindent összevetve kapjuk, hogy

$$k \mid (10^t - 1) - 10(10^{t-1} - 10) = 99,$$

vagyis $k$ lehetséges értékei 1, 3, 9, 11, 33 és 99. A 3-as, 9-es és 11-es oszthatósági szabályok ismeretében könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ezen hat szám mindegyike valóban jó.

*Megjegyzés.* A megoldásban az Euler–Fermat-tételre csak annyiban volt szükség, hogy belássuk, a $k$-nak létezik csupa 1-es számjegyből álló többszöröse. Ezt viszont már a skatulya-elv alkalmazásával is megkaphatjuk. Tekintsük ehhez az $1, 11, 111, 1111, \ldots$ számokat. Ha a sorozatot elég hosszan folytatjuk, biztosan lesz két olyan szám, amely ugyanazt a maradékot adja $k$-val osztva; ha ez az $a$ és a $b$ darab 1-esből álló szám, (ahol $a < b$) akkor különbségük

$$\underbrace{11\ldots1}_{b-a}\underbrace{00\ldots0}_{a} = 10^a \cdot \underbrace{11\ldots1}_{b-a}$$

osztható $k$-val. Mivel $k$ relatív prím a 10-hez, azért $\underbrace{11\ldots1}_{b-a}$ is osztható $k$-val.