Megoldás. Létezik ilyen ponthalmaz. Tekintsük ugyanis a derékszögű koordinátarendszerben a $P_x=(\cos x;\sin x)$ pontokat, ezek éppen az O origó körüli egység sugarú körvonal pontjai. $P_x=P_y$ pontosan akkor teljesül, ha az $x-y$ szám 2π-nek egész számú többszöröse. Álljon K a körvonal azon P_x pontjaiból, amelyekre x egész szám. Kihasználva a π szám irracionális voltát láthatjuk, hogy ezek a pontok páronként különbözők, továbbá $P_x\in K$ esetén $P_{x+\pi}\notin K$. Ezért ha x, y különböző egész számok, akkor a $t_x=OP_x$ és $t_y=OP_y$ egyenesek is különbözők. Minden x egész számra a t_x egyenes szimmetriatengelye a korlátos K halmaznak: a P_y pont tükörképe éppen P_{2x-y}. A K halmaznak tehát végtelen sok szimmetriatengelye van. Tegyük fel, hogy K középpontosan szimmetrikus az S pontra. Ekkor K minden pontja egyben annak a körnek is pontja, melyet az egységkörből úgy kapunk meg, hogy azt S-re tükrözzük. Mivel két különböző körnek legfeljebb két közös pontja lehet, K-nak pedig végtelen sok különböző pontja van, a két kör egybeesik, vagyis $S=O$. Azt viszont már láttuk, hogy K nem lehet középpontosan szimmetrikus O-ra, hiszen például $P_0\in K$, de $P_\pi\notin K$. Tehát a K halmaz valamennyi feltételnek eleget tesz.

Megjegyzések. 1. A helyes megoldások többsége a fenti konstrukciót adta meg, vagy ahhoz hasonlót, mindenképpen egy körvonalon. Ez nem is lehet másként: ha e és f egymást P-ben metsző szimmetriatengelyei K-nak, akkor K invariáns a P pont körüli, a tengelyek által bezárt szög kétszeresével való elforgatásra; a nagyszámú forgásszimmetria megléte tehát szükségszerű. (Két szimmetriatengely nem lehet párhuzamos, mivel akkor a két tükrözés kompozíciója a K halmazt helybenhagyó nemtriviális eltolás lenne, ellentmondva annak a követelménynek, hogy K korlátos.)

2. A közölt megoldás erősen támaszkodik arra a nevezetes tényre, hogy a π irracionális. Ez az eszköz azonban a feladat megoldásában nélkülözhető; *Frankl Nóra* (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., 10. évf.) példája a következő: tekintsük egy körvonal három harmadolópontját, a kapott ívek harmadolópontjait, és így tovább. A kapott végtelen ponthalmaz forgás- és tengelyes szimmetriái a közölt megoldáshoz hasonlóan láthatók, viszont abból az elemi tényből következően nem lesz középpontosan szimmetrikus, hogy az $\frac{1}{2}$ nem írható fel 3-hatvány nevezőjű törtként.