

I. megoldás. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, vagyis minden $1 \leq i \leq n$ esetén található az adott halmazok között egy A_i és egy B_i halmaz úgy, hogy $i \notin A_i$, de $B_i = A_i \cup \{i\}$. Tekintsük az adott halmazokat egy gráf csúcsainak, amelyben minden i -re az A_i és B_i halmazokat összeköttöttük egy e_i éllel. Ennek az n szögpontú, nyilván egyszerű gráfnak pontosan n éle van, tehát található benne egy kör, vagyis adott halmazoknak egy olyan H_1, H_2, \dots, H_k sorozata, ahol $k \geq 3$, és – az indexekkel modulo k számolva – minden i -re H_i és H_{i+1} között halad egy él. A kör irányítását megfelelően választva feltehetjük, hogy $H_1 = A_j$, $H_2 = B_j$ valamely $1 \leq j \leq n$ esetén. Ekkor a j szám nem eleme a H_1 halmaznak, de eleme H_2 -nek. Mivel $i \neq 1$ esetén H_i és H_{i+1} között már nem az e_j él vezet, ebből $j \in H_3$, majd ugyanígy $j \in H_4, \dots, j \in H_k$, végül ($k \geq 3$ miatt) $j \in H_1$ adódik. Ez az ellentmondás az állítás igazát bizonyítja.

II. megoldás. A feladat állításánál általánosabbat látunk be: a halmazok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $i \leq n$ halmazt már $i - 1$ darab alkalmas szám előfordulása alapján is meg tudunk különböztetni, azaz létezik $n - i + 1$ olyan szám, amit mindegyikből elhagyva továbbra is különbözőek maradnak: egy halmaz esetén ez nyilván igaz; ha két halmaz van, és csak egyetlen számban különböznek, akkor elég azt a számot megtartani, ha legalább kettőben, akkor mindegy, hogy melyiket.

Ezután feltehetjük, hogy $m \geq 3$ halmazunk van, és minden $i < m$ -re i számú halmazra igaz az állítás. Vegyünk egy olyan k számot, amely nem fordul elő minden részhalmazban, csak $0 < b < m$ darabban. Ekkor az indukciós feltétel alapján ezt a b darab részhalmazt pusztán $b - 1$ alkalmas szám előfordulása alapján meg lehet egymástól különböztetni, a maradék $m - b$ darab halmazt pedig $m - b - 1$ darab megfelelő szám előfordulása alapján. Bármely két, különböző csoportban levő halmaz a k előfordulásában különbözik egymástól.

Összességében tehát elég legfeljebb

$$1 + (b - 1) + (m - b - 1) = m - 1$$

szám előfordulását nézni (lehetnek ugyanis átfedések is, ami tovább csökkenti ezt a számot).