Megoldás. Tegyük föl, a feladat állításával ellentétben, hogy léteznek olyan $x = \dfrac{X}{Z}$, $y = \dfrac{Y}{Z}$ racionális számok (közös nevezőre hozva), amelyekre

$$5\left(\frac{X}{Z}\right)^2 + 3\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 = 1, \quad \text{azaz} \quad 5X^2 + 3Y^2 = Z^2.$$

Itt értelemszerűen X, Y és Z egész számok, $Z \neq 0$. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy ez utóbbi egyenletnek az egész számok körében egyetlen megoldása van, éspedig $X = Y = Z = 0$. Tegyük föl, hogy léteznek nem csupa nullából álló egész megoldások, és jelöljön ezek közül X_0, Y_0, Z_0 egy olyat, amelyre az $|X_0|$, $|Y_0|$, $|Z_0|$ számok legnagyobbika a lehető legkisebb.

A $2X_0^2 + 3(X_0^2 + Y_0^2) = Z_0^2$ csoportosítás alapján világos, hogy $2X_0^2$ és Z_0^2 ugyanazt a maradékot adja a 3-mal való maradékos osztásnál. Mivel négyzetszám 3-mal osztva 0-t vagy 1-et adhat maradékul, a bal oldal osztási maradéka 0 vagy 2, a jobb oldalé 0 vagy 1 lehet; az egyenlőség tehát csak akkor lehetséges, ha X_0 és Z_0 is osztható 3-mal. Ekkor $X_0 = 3X_1$ és $Z_0 = 3Z_1$, alkalmas X_1 és Z_1 egészekkel. Így

$$3Y_0^2 = Z_0^2 - 5X_0^2 = 9(Z_1^2 - 5X_1^2)$$

szerint Y_0^2, és így Y_0 is osztható 3-mal: alkalmas Y_1 egésszel $Y_0 = 3Y_1$. Ezeket az eredeti egyenletbe helyettesítve az

$$5 \cdot 9 \cdot X_1^2 + 3 \cdot 9 \cdot Y_1^2 = 9 \cdot Z_1^2, \quad \text{vagyis} \quad 5X_1^2 + 3Y_1^2 = Z_1^2$$

összefüggéshez jutunk. Ellentmondást kaptunk, hiszen az $|X_1|$, $|Y_1|$, $|Z_1|$ számok legnagyobbika a harmadrésze az $|X_0|$, $|Y_0|$, $|Z_0|$ számok legnagyobbikának, ezért – nem nulla lévén – kisebb annál.