Megoldás. Az egyenest azonosítsuk a valós számegyenessel, egy tetszőleges s szakasz átrendezés utáni képét jelölje s', a véges sok szakaszból álló S szakaszrendszer átrendezésével kapott új rendszer ennek megfelelően legyen S', végül jelölje $t(S)$ az S-et alkotó szakaszok $U(S)$ uniójának összhosszát. Elegendő az állítást olyan S szakaszrendszerek esetén bizonyítani, amelyekre $U(S)$ összefüggő. Valóban, ha $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$, ahol $U(S_1), U(S_2), \ldots, U(S_k)$ páronként diszjunkt szakaszok, akkor az összefüggő esetre érvényes állítás alapján

$$t(S) = t(S_1) + t(S_2) + \ldots + t(S_k) \geq t(S_1') + t(S_2') + \ldots + t(S_k') \geq t(S')$$

már következik, hiszen szakaszok uniójának összhossza legfeljebb a szakaszok hosszának az összege lehet.

Feltehető tehát, hogy $U(S) = [a, b]$. Azt kell igazolnunk, hogy $t(S') \leq t\big([a, b]\big) = b - a$. Az $U(S')$ legkisebb és legnagyobb elemét jelölje rendre a', illetve b'. Mivel $t(S') \leq t\big([a', b']\big) = b' - a'$, elegendő azt megmutatni, hogy $b' - a' \leq b - a$. Legyen $s \in S$ egy olyan szakasz, amelyre s' baloldali végpontja a', hasonlóan $u \in S$ pedig egy olyan szakasz, amelyre u' jobb oldali végpontja b'. Ha $s = u$, akkor $U(S') = s'$, és $s \subseteq U(S)$ miatt az állítás nyilvánvaló, hiszen s' egybevágó s-sel. Feltehetjük tehát, hogy $s \neq u$, és legyen $[c, d]$ a legrövidebb intervallum, amely tartalmazza az s és u szakaszok egyesítését. Ekkor $a \leq c \leq d \leq b$, vagyis elegendő azt megmutatni, hogy $b' - a' \leq d - c$. Vegyük észre, hogy ez lényegében az eredeti feladat állításának az a speciális esete, amikor S-et csupán két szakasz (s és u) alkotja. Pontosabban:

Ha egy egyenesen az s és u szakaszokat úgy rendezzük át, hogy középpontjaik távolsága nem nő, akkor uniójuk konvex burkának a hossza sem nő.

Jelölje s és u hosszát α, illetve β, középpontjaik távolságát pedig ϱ. Ha a szakaszokat tükrözzük a középpontjaik alkotta szakasz felezőpontjára, akkor a fenti mennyiségek egyike sem változik meg; ezért feltehetjük, hogy az s bal oldali végpontja c.

1. eset: Ha u nem része s-nek, akkor u jobb oldali végpontja d. Jelölje az s jobb oldali végpontját y, az u bal oldali végpontját x. Ekkor $\alpha = y - c$, $\beta = d - x$, ezért $d - c = (d - x) + (x - y) + (y - c) = (\alpha + \beta) + (x - y)$, azaz $x - y = d - c - (\alpha + \beta)$; így

$$\varrho = \left| \frac{x + d}{2} - \frac{c + y}{2} \right| = \frac{1}{2}\big|(\alpha + \beta) + 2(x - y)\big| =$$

$$= \left| \frac{\alpha + \beta}{2} + (x - y) \right| = \left| (d - c) - \frac{\alpha + \beta}{2} \right|.$$

Mivel $d - c$ legalább akkora, mint akár α vagy β, azért $\varrho = (d - c) - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, tehát

$$d - c = \varrho + \frac{\alpha + \beta}{2}\,.$$

Ekkor nyilván a pozitív $x - c$ és $d - y$ számok összege legalább akkora, mint különbségük abszolút értéke, azaz

$$(x - c) + (d - y) \geq \big|(x - c) - (d - y)\big|,$$

így

$$2\varrho = (x + d) - (c + y) \geq \big|(y - c) - (d - x)\big| = |\alpha - \beta|.$$

2. eset: Ha u része s-nek, akkor s maga a $[c, d]$ intervallum, az u bal, illetve jobb oldali végpontja legyen x és y; ekkor

$$d - c = \alpha = \max\{\alpha, \beta\},$$

és nyilván, az előbbi esethez hasonló okból

$$(d - y) - (x - c) \leq (d - y) + (x - c),$$

azaz

$$2\varrho = (d + c) - (x + y) \leq (d - c) - (y - x) = \alpha - \beta = |\alpha - \beta|.$$

A két eset összefoglalásaként tehát elmondhatjuk, hogy általában

$$d - c = \begin{cases} \varrho + \dfrac{\alpha + \beta}{2}, & \text{ha } |\alpha - \beta| \leq 2\varrho, \\[2ex] \max\{\alpha, \beta\}, & \text{ha } |\alpha - \beta| \geq 2\varrho. \end{cases}$$

Tehát $f(\varrho) = d - c$ a ϱ mennyiségnek monoton növő függvénye. Ezért, ha az s' és u' szakaszok középpontjának távolsága $\varrho' < \varrho$, akkor $b' - a' = f(\varrho') \leq f(\varrho) = d - c$.