I. megoldás. Tetszőleges a, b, c, d számokra

$$\begin{aligned}
&(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)= \\
&=\big((a+b)^2-(c+d)^2\big)\big((a-b)^2-(c-d)^2\big)= \\
&=(a^2+b^2-c^2-d^2+2ab-2cd)(a^2+b^2-c^2-d^2-2ab+2cd)= \\
&=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-(2ab-2cd)^2= \\
&=a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2-2b^2d^2-2c^2d^2+8abcd.
\end{aligned}$$

Ezt a 0-val egyenlő számot az $S=2(a^4+b^4+c^4+d^4)+8abcd$ számból kivonva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
S&=a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2= \\
&=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2,
\end{aligned}$$

ami valóban egy egész szám négyzete.

II. megoldás. Írjuk az $a+b+c+d=0$ feltételt $a+b=(-1)(c+d)$ alakba. Ennek mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd, \qquad (a^2+b^2)-(c^2+d^2)=2(cd-ab).$$

Ismételt négyzetre emelés után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
a^4+b^4+2a^2b^2+c^4+d^4+2c^2d^2-2(a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2)&= \\
=4c^2d^2+4a^2b^2-8abcd.&
\end{aligned}$$

Innen pedig valóban

$$\begin{aligned}
&2(a^4+b^4+c^4+d^4)+8abcd= \\
&=a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2)= \\
&=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.
\end{aligned}$$