Megoldás. Legyen $x' = x + 1$. A kifejezéshez az

$$S = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'}$$

mennyiséget hozzáadva egész számot (4-et) kapunk. Szükséges és elégséges feltétel tehát, hogy az 1-nél nagyobb, páronként különböző a', b', c', d' egész számokra S értéke is egész legyen. Mivel

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 2\,,$$

ez csak úgy lehet, ha $S = 1$. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $a' < b' < c' < d'$. Ha $a' \geq 3$, akkor $S \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < 1$, ezért szükségképpen $a' = 2$,

$$S' = \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{2}\,.$$

Ha $b' \geq 6$ lenne, akkor $S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} < 1$ lenne, ezért $3 \leq b' \leq 5$. A $b' = 5$ esetet könnyen kizárhatjuk, ekkor ugyanis $c' \geq 6$. Ha $c' = 6$ lenne, akkor

$$\frac{1}{d'} = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$$

lenne, ami nem lehetséges. Ha pedig $c' \geq 7$, akkor $d' \geq 8$, és így $S' < 1/2$.

A $b' = 4$ esetben

$$\frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{4}\,,$$

vagyis $c'd' = 4c' + 4d'$, és így $(c' - 4)(d' - 4) = 16$. Mivel $1 \leq c' - 4 < d' - 4$ egész számok, ez csak úgy lehetséges, ha $c' - 4 = 1$ és $d' - 4 = 16$, vagy $c' - 4 = 2$, $d' - 4 = 8$. Az első esetben $c' = 5$ és

$d' = 20$, a másodikban $c' = 6$ és $d' = 12$. A $b' = 3$ esetben hasonló gondolatmenettel $\frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{6}$ alapján $(c' - 6)(d' - 6) = 36$ adódik, ahol $-2 \leq c' - 6 < d' - 6$. Innen a $(c' - 6; d' - 6)$ számpár lehetséges értékeire $(1; 36)$, $(2; 18)$, $(3; 12)$ és $(4; 9)$ adódik, vagyis ebben az esetben a $(c'; d')$ számpár $(7; 42)$, $(8; 24)$, $(9; 18)$, illetve $(10; 15)$ lehet.

A feltételt tehát 6 különböző $a' < b' < c' < d'$ számnégyes elégíti ki. Ennek megfelelően a feladatnak $6 \cdot 4! = 144$ különböző megoldása van, melyeket az $(1; 3; 4; 19)$, az $(1; 3; 5; 11)$, az $(1; 2; 6; 41)$, az $(1; 2; 7; 23)$, az $(1; 2; 8; 17)$, illetve az $(1; 2; 9; 14)$ számnégyesek összes lehetséges permutációjával kaphatunk meg.