Megoldás. Legyen a három pozitív szám a, b és c. Ekkor:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1=$$

$$=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}.$$

Mivel a, b, c pozitív számok, így $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$ és $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$, ezért

$$3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 3+2+2+2=9.$$

Tehát biztos, hogy a kifejezés értéke legalább 9. A 9-et fel is veszi $a=b=c=1$ esetén.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges nagy lehet az értéke, azaz felülről nem korlátos.

Legyen K a 9-nél nagyobb szám. Igazoljuk, hogy alkalmas a, b, c esetén

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>K.$$

Legyen pl. $a=\frac{K}{2}$, $b=\frac{K}{2}$, $c=1$, ekkor:

$$\left(\frac{K}{2}+\frac{K}{2}+1\right)\left(\frac{2}{K}+\frac{2}{K}+1\right)>\left(\frac{K}{2}+\frac{K}{2}+1\right)\cdot 1=K+1>K.$$

Mivel K tetszőlegesen nagy lehet, a keresett legszűkebb intervallum: $[9;\infty[$.