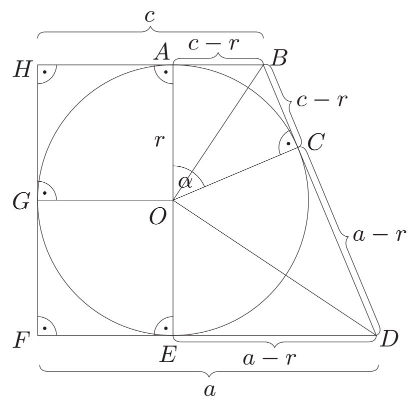
I. megoldás. Az *ábra* jelöléseivel a bizonyítandó állítás:

$$2r = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}\,.$$



Tudjuk, hogy egy körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, vagyis $AB = BC = c - r$, $CD = DE = a - r$, $EF = FG = r$, $GH = HA = r$. Tudjuk továbbá, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, így a trapézt felosztottuk két egybevágó négyzetre és két deltoidra. Az $ABCO$ és az $OCDE$ négyszögek deltoidok, a szimmetriatengelyük egyben szögfelező:

$$AOB\sphericalangle = BOC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}, \quad COD\sphericalangle = DOE\sphericalangle = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\,.$$

Tehát a BOD háromszög derékszögű, amelyet az átfogójához tartozó magassága két, egymáshoz és az eredeti háromszöghöz is hasonló derékszögű háromszögre vág szét. (Szögeik: 90°, $\frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.)

A hasonlóság alapján:

$$\frac{BC}{CO} = \frac{CO}{CD}\,, \quad \text{azaz} \quad \frac{c-r}{r} = \frac{r}{a-r}\,,$$

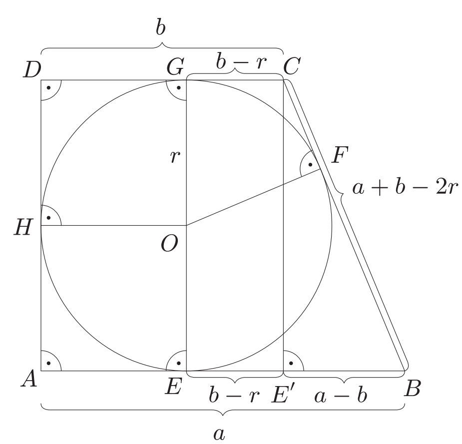
amiből kapjuk, hogy $r = \dfrac{ac}{a+c}$.

A trapéz derékszögű szára $2r$, vagyis

$$2r = \frac{2ac}{a+c} = \frac{2}{\frac{a+c}{ac}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}\,,$$

és ezt kellett belátni.

II. megoldás. Jelölje $ABCD$ a trapéz csúcsait, O a beírható k kör középpontját, r a sugarát, E, F, G, H pedig az oldalak és a k kör érintési pontjait. A feladat szövege szerint $ADC\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 90^\circ$.



Felhasználva, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, G, O és E pontok egy egyenesbe esnek, $EG \parallel AD$ és $AD = EG = EO + OG = r + r = 2r$.

Legyen $AB = a$, $DC = b$, ekkor $CG = b - r$, illetve $BE = a - r$, mivel $AE = HO = DG = r$. Ismert, hogy körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért $CF = CG = b - r$, $BF = BE == a - r$ és

$$BC = BF + CF = a - r + b - r = a + b - 2r.$$

Toljuk el az EG szakaszt úgy, hogy a G a C pontba kerüljön. Így az E az E' pontba kerül és $AE' = AE + EE' = r + (b - r) = b$, ekkor $E'B = a - b$. Az eltolás miatt $CE'B\sphericalangle = 90°$.

Írjuk fel a $CE'B$ derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt: $4r^2 + (a - b)^2 = (a + b - 2r)^2$.

Ebből kapjuk, hogy $r = \dfrac{ab}{a + b}$, vagyis

$$AD = 2r = \frac{2ab}{a + b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

és ezt kellett belátni.