

Megoldás. Az elektron tömege mintegy 2000-szer kisebb, mint a proton tömege, ezért jogos közelítés az, hogy a hidrogénatomot és a bombázó protonokat egyaránt $m_h = m_p = m = 1,673 \cdot 10^{-27}$ kg tömegű részecskének tekintsük.

Az ütközés előtt $v_0 = 10^5$ m/s sebességű proton mozgási energiája

$$E_{0,p} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 8,37 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 8,37 \text{ aJ}.$$

(A proton sebessége elhanyagolhatóan kicsi a fénysebesség mellett, emiatt jogos a „klasszikus”, nemrelativisztikus mozgási energia képletének használata.)

A hidrogénatom n -edik gerjesztési szintjének energiája a Balmer-formula szerint:

$$E_n = \frac{E_0}{(n+1)^2},$$

ahol $E_0 = -2,2$ aJ az alapállapot energiája. Ennek megfelelően a negyedik gerjesztett állapot és az alapállapot energiakülönbsége:

$$\Delta E_{0 \rightarrow 4} = E_4 - E_0 = \frac{E_0}{5^2} - E_0 = -\frac{24}{25} E_0 = +2,11 \text{ aJ}.$$

A két részecskéből (a protonból és a hidrogénatomból) álló rendszer közös tömegközéppontja

$$v_{\text{tkp}} = \frac{m_p v_0}{m_p + m_h} \approx \frac{m v_0}{2m} = \frac{v_0}{2} = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebességgel mozog a laboratóriumhoz képest.

Vizsgáljuk az ütközést a tömegközépponti (vagyis a tömegközépponttal együtt mozgó) koordináta-rendszerből! Ebből a rendszerből nézve mindkét részecske $v' = v_{\text{tkp}}$ nagyságú sebességgel közeledik a közös tömegközéppont felé, mindkettőjük mozgási energiája

$$E' = \frac{1}{2}mv'^2 = 2,09 \text{ aJ},$$

a rendszer összenergiája pedig $E_{\text{összes}} = 2E' = 4,18$ aJ.

Az ütközés során a rendszer teljes lendülete változatlan (nulla) marad, így az egyforma tömegű részecskék ugyanakkora v'' sebességgel lökődnek szét, a mozgási energiák összege pedig a gerjesztésnek megfelelő $\Delta E_{0 \rightarrow 4}$ értékkel lecsökken:

$$E'' = \frac{1}{2}mv''^2 + \frac{1}{2}mv''^2 = E_{\text{összes}} - \Delta E_{0 \rightarrow 4} = 4,18 \text{ aJ} - 2,11 \text{ aJ} = 2,07 \text{ aJ}.$$

Innen következik, hogy a részecskék sebessége az ütközés után

$$v'' = \sqrt{\frac{E''}{m}} = \sqrt{\frac{2,07 \cdot 10^{-18} \text{ J}}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 3,5 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A részecskék sebességét a laboratóriumi koordináta-rendszerbe visszatranszformálva kapjuk, hogy a gerjesztett hidrogénatom

$$v_h = v_{\text{tkp}} + v'' = 8,5 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

a proton pedig

$$v_p = v_{\text{tkp}} - v'' = 1,5 \cdot 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

sebességgel fog mozogni az ütközés után.