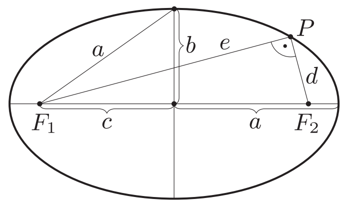
Megoldás. Legyen az ellipszis nagytengelyének hossza $2a$, kistengelyének hossza $2b$ $(a > b)$, az F_1 és F_2 fókuszpontjainak távolsága pedig $2c$. Tudjuk, hogy ekkor $a^2 = b^2 + c^2$. A t területű derékszögű háromszög fókuszoktól különböző csúcsa legyen P, befogóinak hossza pedig d és e. A P az F_1F_2 szakasz Thalész körének és az ellipszisnek a metszéspontja, ezért pontosan akkor létezik a feltételeknek megfelelő háromszög, ha $c \geq b$.



A PF_1F_2 háromszög területe

$$t = \frac{de}{2},$$

az ellipszis területe pedig $ab\pi$. Az ellipszis definíciójából következik, hogy

$$d + e = 2a, \quad \text{azaz} \quad d^2 + e^2 + 2de = 4a^2, \quad \text{vagyis} \quad 4t = 4a^2 - d^2 - e^2.$$

Pitagorasz tételét és az ellipszis tengelyeinek hossza, valamint fókuszainak távolsága közti összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$d^2 + e^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 4a^2 - 4b^2.$$

Tehát

$$4t = 4a^2 - (4a^2 - 4b^2) = 4b^2, \quad \text{azaz} \quad t = b^2.$$

Vagyis azt kell bizonyítanunk, hogy

$$ab\pi \geq \sqrt{2}b^2\pi, \quad \text{azaz} \quad a \geq \sqrt{2}b.$$

Ez viszont teljesül, mert $c \geq b$ miatt

$$a^2 = b^2 + c^2 \geq 2b^2.$$

Tehát ha létezik a feltételeknek eleget tevő háromszög, akkor az ellipszis területe legalább $\sqrt{2}\pi t$. Egyenlőség pontosan akkor van, ha az ellipszis fókuszainak távolsága megegyezik kistengelyének hosszával, a háromszög harmadik csúcsa pedig a kistengely valamelyik végpontja.