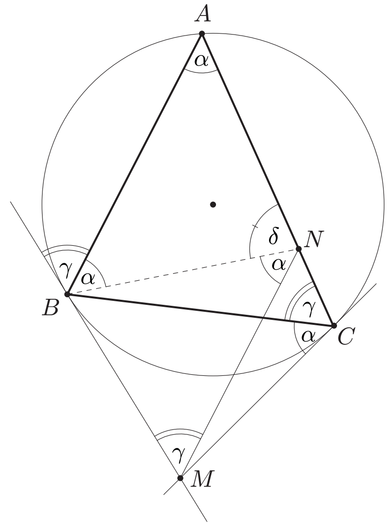
Megoldás. Három esetet különböztetünk meg.

I. A háromszögben az A pontnál hegyesszög van (1. ábra). Legyen $BCA\sphericalangle = \gamma$. Ekkor a B csúcsnál lévő, AB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög is γ. $NMB\sphericalangle = \gamma$, mert $NM \parallel AB$.



1. ábra

Legyen $BAC\sphericalangle = \alpha$, ekkor $BCM\sphericalangle = \alpha$, mert a BC ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög.

Mivel $BMN\sphericalangle = BCN\sphericalangle = \gamma$, azért $BMCN$ húrnégyszög, hiszen a körülírt körében ezek a szögek a BN ívhez tartozó kerületi szögek. Így $BNM\sphericalangle = BCM\sphericalangle = \alpha$, mert az előbbi körben a BM ívhez tartozó kerületi szögek.

$MBA\sphericalangle = 180° - \gamma$, ezért

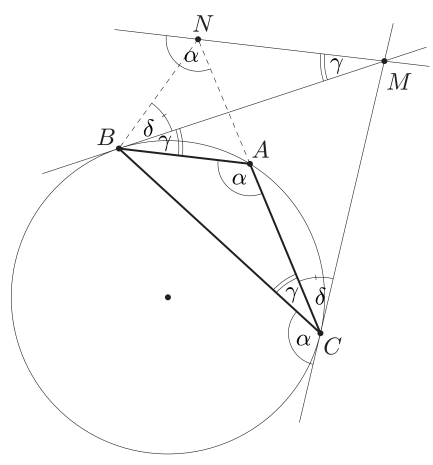
$$ANM\sphericalangle = 360° - (\alpha + \gamma + 180° - \gamma) = 180° - \alpha.$$

Ebből következik, hogy $BNA\sphericalangle = \delta = 180° - 2\alpha$.

Így $ABN\sphericalangle = 180° - (180° - 2\alpha + \alpha) = \alpha$, tehát a BNA háromszög egyenlő szárú, így $AN = BN$.

II. A háromszögben az A pontnál derékszög van. Ekkor a B és C pontban húzott érintők párhuzamosak, mert a BC oldal átmérő a körben. Az M pont nem jön létre, így ekkor az állítás nem igaz.

III. A háromszögben az A pontnál tompaszög van (2. ábra). Legyen $BAC\sphericalangle = \alpha$. Ekkor a C csúcsnál lévő, AB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög is α. Az N csúcsnál is α szög van, mert $NM \parallel AB$.



2. ábra

Legyen $BCA\sphericalangle = \gamma$, ekkor $ABM\sphericalangle = \gamma$, mert az AB ívhez tartozó érintőszárú kerületi szög. $BMN\sphericalangle = \gamma$, mert váltószögek $ABM\sphericalangle$-gel. Így $BCMN$ húrnégyszög, mert a körülírt körében $BMN\sphericalangle$ és $BCN\sphericalangle$ szögek a BN ívhez tartozó kerületi szögek.

Így $MCN\sphericalangle = \delta = 180° - \alpha - \gamma = MBN\sphericalangle$, mert az előbbi körben az MN ívhez tartozó kerületi szögek.

$$NBA\sphericalangle = MBN\sphericalangle + \gamma = 180° - \alpha - \gamma + \gamma = 180° - \alpha = NAB\sphericalangle,$$

tehát az ABN háromszög egyenlő szárú, így $AN = BN$.