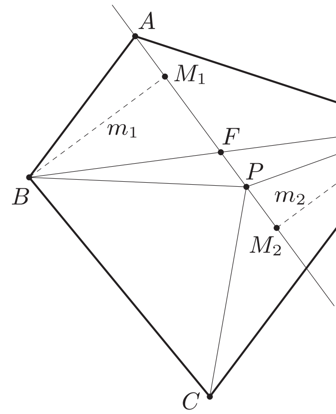
I. megoldás. Tegyük fel, hogy létezik egy megfelelő P pont. Ekkor $t_{ABP} = t_{ADP}$, ezért az AP egyenes a B és a D ponttól egyenlő távolságra van, vagyis $m_1 = m_2$. Ebből következik, hogy a BM_1F és a DM_2F derékszögű háromszögek egybevágók, így $BF = DF$, tehát az AP egyenes felezi a BD átlót (*1. ábra*). Hasonló okok miatt, a $t_{CBP} = t_{CDP}$ egyenlőségéből következik, hogy a CP egyenes is felezi a BD átlót.



1. ábra

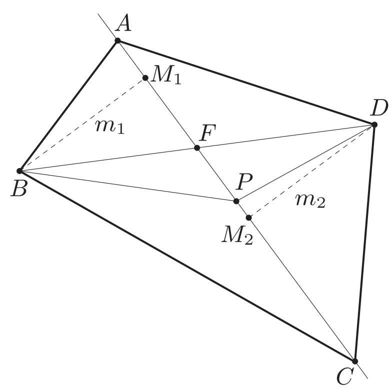
Feltéve, hogy az AP és CP egyeneseknek egyetlen közös pontja van, az nem lehet más, mint a BD átló felezőpontja. Tehát a P pont azonos a BD átló felezőpontjával.

Mivel $t_{ABP} = t_{BCP}$, illetve $t_{ADP} = t_{CDP}$, azért a BP és a DP egyenes egyenlő távolságra van az A és a C ponttól. Mivel B, P és D egy egyenesre esnek, a BD egyenes egyenlő távol van A-tól és C-től, azaz felezi az AC szakaszt.

Ha az A, P és C pontok esnek egy egyenesbe, akkor az AC egyenesre igaz, hogy felezi a BD átlót.

Tehát ha a P pont létezik, akkor a négyszög egyik átlója felezi a másikat.

Fordítva is igaz: ha a négyszög egyik átlója felezi a másikat, akkor a nem felezett átló felezőpontja megfelel a feltételnek, hiszen a részháromszögek AP és PC oldalai és a hozzájuk tartozó magasságok is egyenlők (*2. ábra*).

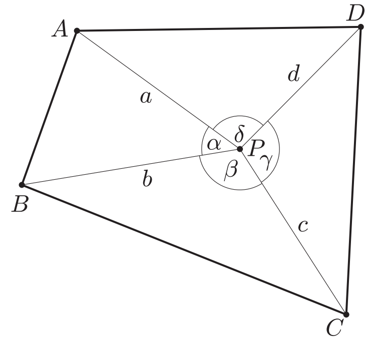


2. ábra

II. megoldás. A háromszög-terület egyenlőségeit felhasználva tudjuk, hogy

$$ab \sin \alpha = bc \sin \beta = cd \sin \gamma = da \sin \delta$$

(*3. ábra*), amiből $abcd \sin \alpha \sin \gamma = bacd \sin \beta \sin \delta$, vagyis $\sin \alpha \sin \gamma = \sin \beta \sin \delta$.



3. ábra

Tudjuk, hogy

$$\sin\alpha\cdot\sin\gamma=\frac{\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)}{2}$$

és

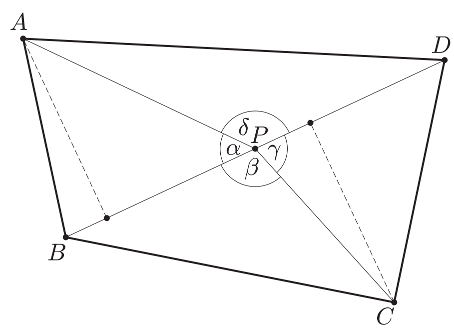
$$\sin\beta\cdot\sin\delta=\frac{\cos(\beta-\delta)-\cos(\beta+\delta)}{2}.$$

Tehát

$$\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta\sin\delta}=\frac{\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\beta-\delta)-\cos(\beta+\delta)}=1.$$

Mivel $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^\circ$, azért $\cos(\alpha+\gamma)=\cos(\beta+\delta)$. Ebből viszont következik, hogy $\cos(\alpha-\gamma)=\cos(\beta-\delta)$, amiből a cosinus függvény párosságát figyelembe véve $\alpha-\gamma=\beta-\delta$ vagy $\alpha-\gamma=\delta-\beta$. Szimmetria-okok miatt elég egyikkel foglalkozni, tehát $\alpha-\gamma=\beta-\delta$, vagyis $\alpha+\delta=\beta+\gamma=180^\circ$. Ez azt jelenti, hogy a P pont a BD átlón helyezkedik el.

Az $\alpha+\delta=180^\circ$ szerint $\alpha=180^\circ-\delta$, így $\sin\alpha=\sin\delta$. Ezt az $ab\sin\alpha=da\sin\delta$ egyenletbe visszahelyettesítve $b=d$ adódik. Így a P pont a BD átló felezőpontja lesz. Ekkor $ab\sin\alpha=cd\sin\gamma$-ból $a\sin\alpha=c\sin\gamma$, vagyis az A és C pontok egyenlő távolságra vannak a BD átlótól.



4. ábra

Tehát a feladat feltételét azok a négyszögek elégítik ki, melyeknek van olyan átlójuk, amelytől a másik két csúcs egyenlő távolságra van, és a P pont ennek az átlónak a felezőpontjában lesz.