Megoldás. Legyen $[x] = k \in \mathbb{Z}$. Így $x^4 - 2x^2 - k = 0$. Az egyenlet gyökeinek négyzete:

$$x_{1,2}^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4k}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+k}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+k},$$

ahol $1 + k \geq 0$ vagyis $k \geq -1$.

1. Ha $k < 0$, akkor $k = -1$. Ekkor

$$x_{1,2}^2 = 1 \pm \sqrt{0} = 1,$$

és mivel $x < 0$, azért $x = -1$.

2. Ha $k = 0$, akkor

$$x_{1,2}^2 = 1 \pm \sqrt{1}.$$

Ebből $x = 0$ a jó megoldás, az $x = \pm\sqrt{2}$ nem felel meg a $k = [x]$ feltételnek.

3. Ha $k > 0$, akkor $x > 0$, és az egészrész definíciójából következően $x \geq [x] = k$.

Ha $x^2 = 1 - \sqrt{1+k} \geq 0$ lenne, akkor $1 \geq \sqrt{1+k}$, vagyis $1 \geq 1 + k$, amiből $0 \geq k$ adódik, de ez ellentmond a feltételnek, ezért $x^2 = 1 + \sqrt{1+k}$.

Mivel $x > 0$, azért az $x = \sqrt{1 + \sqrt{1+k}} \geq k$ feltételnek kell teljesülnie. Ebből

$$1 + \sqrt{1+k} \geq k^2, \qquad \text{vagyis} \qquad \sqrt{1+k} \geq k^2 - 1,$$

amit a $k^2 \geq 1$ feltétellel négyzetre emelve: $1+k \geq k^4 - 2k^2 + 1$. Rendezés után mindkét oldalt k-val elosztva: $1 \geq k^3 - 2k$, rendezve és szorzattá alakítva:

$$0 \geq k^3 - 2k - 1 = k(k^2 - 1) - (k+1) = k(k-1)(k+1) - (k+1) = (k+1)(k^2 - k - 1)$$

a) eset: $k + 1 \geq 0$ és $k^2 - k - 1 \leq 0$, amiből

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad \text{de } 0 < k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618,$$

vagyis $k = 1$ és

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1+k}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \approx 1{,}554 > 1.$$

b) eset: $k + 1 < 0$ és $k^2 - k - 1 > 0$, de ez a $k > 0$ alapfeltevés miatt nem teljesülhet.

Az egyenletnek tehát három megoldása van: -1, 0 és $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.