1. Csillagok központi hőmérsékletének klasszikus becslése

Akkor közelíti meg a két proton egymást d_c távolságra, ha mozgási energiájuk összege megegyezik a d_c távolsághoz tartozó elektromos potenciális energiával. A mozgási energiák az ekvipartíció-tételből határozhatók meg. Tehát

$$2\frac{m_\mathrm{p} v_\mathrm{rms}^2}{2} = 2\frac{3}{2}kT_c = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c}, \quad \text{így} \quad T_c = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k} = 5,5\cdot 10^9\ \mathrm{K}. \tag{17}$$

2. Annak igazolása, hogy az előző hőmérsékletbecslés hibás

A hidrosztatikai egyensúlyt leíró $\dfrac{\Delta P}{\Delta r} = -\dfrac{GM_r\rho_r}{r^2}$ egyenletben elvégezve a javasolt $\Delta r = R$, $\Delta P = -P_c$, $M_r = M$ és $\rho_r = \rho_c$ helyettesítéseket, a központi nyomásra azt kapjuk, hogy $P_c = \dfrac{GM\rho_c}{R}$. Ugyanakkor az ideális gáztörvény szerint

$$P_c = \frac{NkT_c}{V} = \frac{2\rho_c kT_c}{m_\mathrm{p}},$$

ahol felhasználtuk, hogy $N = \dfrac{2M}{m_\mathrm{p}}$, hiszen a protonok adják lényegében a csillag teljes tömegét, de az elektronok is hozzájárulnak a nyomáshoz. A két egyenletből megkapható a keresett központi hőmérséklet:

$$T_c = \frac{GMm_\mathrm{p}}{2kR}.$$

Innen az M/R arány a (17) értékkel számolva:

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_\mathrm{p}} = 1{,}4\cdot 10^{24}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}. \tag{18}$$

A Nap esetén ugyanez az arány $\dfrac{M_\odot}{R_\odot} = 2{,}9\cdot 10^{21}\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$, ami három nagyságrenddel kisebb, mint az előző elmélet jóslata!

3. Csillagok központi hőmérsékletének kvantummechanikai becslése

Megoldásunk hasonló az 1. ponthoz. A következő egyenleteket írhatjuk föl:

$$\text{ekvipartíció-tétel:} \qquad \frac{1}{2}m_\mathrm{p} v_\mathrm{rms}^2 = \frac{3}{2}kT_c, \tag{19a}$$

$$\text{mechanikai energiamegmaradás:} \qquad m_\mathrm{p} v_\mathrm{rms}^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c}, \tag{19b}$$

$$\text{de Broglie-hullámhossz:} \qquad d_c = \frac{\lambda_\mathrm{p}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}m_\mathrm{p} v_\mathrm{rms}}. \tag{19c}$$

Az egyenletrendszer egyszerű megoldható T_c-re:

$$T_c = \frac{q^4 m_\mathrm{p}}{24\pi^2\varepsilon_0^2 kh^2} = 9{,}7\cdot 10^6\ \mathrm{K}. \tag{20}$$

A (18) összefüggés felhasználásával ehhez a hőmérséklethez tartozó M/R arány $2{,}4\cdot 10^{21}\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$, ami már közel azonos a Nap esetén megfigyelésekből számolt értékkel.

4. Csillagok tömeg/sugár aránya

Felhasználva az (18) és a (20) formulákat,

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2}, \tag{21}$$

ami valóban kizárólag univerzális fizikai állandóktól függ.

5. A legkisebb csillagok tömege és sugara

Az elektronok száma megegyezik a protonok számával, ami $\dfrac{M}{m_\mathrm{p}}$, tehát

$$n_\mathrm{e} = \frac{M}{m_\mathrm{p}V} = \frac{3M}{4\pi R^3 m_\mathrm{p}}. \tag{22}$$

Ez azt jelenti, hogy a szomszédos elektronok közti tipikus távolság $d_\mathrm{e} = n_\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$. (Számolhatunk úgy, mintha az elektronok egy szabályos, d_e rácsállandójú köbös rácsban helyezkednének el a csillag belsejében.)

A legkisebb sugarat kicsit hosszadalmas, de egyszerű számolással kaphatjuk meg. Induljunk ki a $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}} = \frac{h}{2^{1/2} m_e v_e}$ egyenlőtlenségből, ahol v_e az elektronok termikus sebességét jelöli. Az ekvipartíció-tétel alapján $v_e = \sqrt{\frac{3kT_c}{m_e}}$, a d_e tipikus távolságot kifejeztük a (22) egyenletben felírt elektronsűrűséggel, az M tömeget beírhatjuk a (21) egyenletből, és a T_c hőmérsékletet megadja a (20) formula. Ezeket a behelyettesítéseket mind elvégezve, rendezés után a következő egyenlőtlenséget kapjuk a csillag sugarára:

$$R \geq \frac{\varepsilon_0^{1/2} h^2}{2^{1/2} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}} = 6{,}9 \cdot 10^7 \text{ m} = 0{,}10\, R_\odot .$$

Ezután a minimális tömeget a (21) egyenletből kaphatjuk meg:

$$M \geq 1{,}7 \cdot 10^{29} \text{ kg} = 0{,}09\, M_\odot .$$

6. Hélium-fúzió öregebb csillagokban

Jelölje v_{He} a hélium atommagok termikus sebességét. Két ütköző mag együttes $m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}^2$ mozgási energiája megegyezik a $d_c = \frac{\lambda_{\mathrm{He}}}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2} m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}}$ távolsághoz tartozó $\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c}$ potenciális energiával, ahonnan a hélium atommagok termikus sebessége

$$v_{\mathrm{He}} = \frac{\sqrt{2} q^2}{\pi \varepsilon_0 h} = 2{,}0 \cdot 10^6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Ezután a hőmérséklet az ekvipartíció-tételből számolható ki:

$$T_{\mathrm{He}} = \frac{m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}^2}{3k} = 6{,}5 \cdot 10^8 \text{ K}.$$

Ez az érték nagyságrendileg egyezik a pontosabb csillagmodellek eredményével.