Ennek a feladatnak a megoldásában kulcsszerepet játszik a relativisztikus, longitudinális Doppler-effektus. Ha az ω körfrekvenciájú fényt kibocsátó fényforrás a megfigyelőhöz képest v relatív sebességgel mozog, akkor a megfigyelő által észlelt ω' körfrekvencia

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1 \pm \frac{v}{c}}{1 \mp \frac{v}{c}}} \approx \omega\left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \tag{8}$$

ahol c a fénysebesség, és a második, közelítő egyenlőség akkor igaz, ha $\frac{v}{c} \ll 1$. A felső előjelezés akkor érvényes, ha a fényforrás és a megfigyelő közelednek egymáshoz, az alsó pedig akkor, ha távolodnak. (A közelítés az $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes $(1+\varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ formula többszöri alkalmazásával kapható meg.)

Jelölje ω_L a lézer laboratóriumban mért körfrekvenciáját, legyen $\hbar\omega_0$ az atom két állapota közti energiakülönbség. Ekkor a $-x$ tengely irányába haladó foton energiája $\hbar\omega_L$, impulzusa $-\frac{\hbar\omega_L}{c} = -\hbar q$, ahol q a hullámszám.

A feladatmegoldás során végig feltételezzük, hogy $\frac{v}{c} \ll 1$, valamint

$$\frac{\hbar q}{mv} = \frac{\hbar\omega_L}{mvc} \ll 1,$$

és ezen kis mennyiségekben első rendig számolunk.

I. rész: A lézeres hűtés alapjai

1. Elnyelés (abszorpció)

A (8) egyenlet alapján a fényforráshoz v sebességgel közeledő atom által észlelt frekvencia $\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$, tehát a rezonanciafeltétel $\omega_0 = \omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$. A foton elnyelése után az atom impulzusa a foton impulzusával csökken, így $p_\mathrm{a} = mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}$. Az atom teljes energiája a mozgási energiájának és a gerjesztési energiának az összege, azaz

$$\varepsilon_\mathrm{a} = \frac{p_\mathrm{a}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega_L.$$

2. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $-x$ irányban

A $v' = v - \frac{\hbar\omega_L}{vc}$ sebességgel mozgó atom saját rendszerében ω_0 frekvenciájú fotont bocsát ki, ami azt jelenti, hogy a labor rendszeréből a foton frekvenciája

$$\omega_0\left(1-\frac{v'}{c}\right) = \omega_0\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar\omega_L}{mvc}\frac{v}{c}\right) \approx \omega_0\left(1-\frac{v}{c}\right) \approx \omega_L. \tag{9}$$

Innen a foton energiája és impulzusa egyszerűen kiszámolható:

$$p_\mathrm{f}^- \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \qquad \varepsilon_\mathrm{f}^- \approx \hbar\omega_L. \tag{10a}$$

A foton kibocsátása után az atom impulzusa ezzel az értékkel nő, így

$$p_\mathrm{a}^- \approx mv, \qquad \varepsilon_\mathrm{a}^- = \frac{\left(p_\mathrm{a}^-\right)^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2}. \tag{10b}$$

Végeredményben az abszorpciós-emissziós folyamat után a két részecske állapota olyan, mintha a foton nem is lépett volna kölcsönhatásba az atommal.

3. Egy foton spontán kibocsátása (emissziója) a $+x$ irányban

Ha az atom $+x$ irányban bocsátja ki a fotont, akkor labor rendszerében nagyobbnak észleljük a foton frekvenciáját. Az előző (9) levezetéshez hasonlóan kell számolnunk, azonban v' előjele módosul:

$$\omega_0\left(1+\frac{v'}{c}\right) \approx \omega_0\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right).$$

Ezután már könnyen megkapjuk a foton, illetve az atom energiáját és impulzusát:

$$p_\mathrm{f}^+ \approx \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right), \qquad \varepsilon_\mathrm{f}^+ \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right), \tag{11a}$$

$$p_\mathrm{a}^+ \approx mv - \frac{2\hbar\omega_L}{c}, \qquad \varepsilon_\mathrm{a}^+ \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{4\hbar\omega_L}{mvc}\right). \tag{11b}$$

4. Átlagos kibocsátás (emisszió) az elnyelés (abszorpció) után

Minthogy a spontán emisszió egyforma valószínűséggel mehet végbe $+x$ és $-x$ irányban, a keresett átlagértékek a (10) és (11) mennyiségek számtani közepeiként kaphatók meg:

$$\bar{p}_\mathrm{f} \approx \frac{\hbar\omega_L v}{c^2} \approx 0, \qquad \bar{\varepsilon}_\mathrm{f} \approx \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right), \tag{12a}$$

$$\bar{p}_\mathrm{a} \approx mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}, \qquad \bar{\varepsilon}_\mathrm{a} \approx \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{2\hbar\omega_L}{mvc}\right). \tag{12b}$$

5. Energia- és impulzusátadás

A $-x$ irányban haladó foton által az atomnak átlagosan átadott impulzus és energia a kölcsönhatás utáni (12) átlagértékek és a kezdeti értékek különbségeként kapható meg:

$$\Delta p^- = \bar{p}_\mathrm{a} - mv \approx -\frac{\hbar\omega_L}{c}, \qquad \Delta\varepsilon^- = \bar{\varepsilon}_\mathrm{a} - \frac{mv^2}{2} \approx -\frac{\hbar\omega_L v}{c}. \tag{13}$$

6. Energia- és impulzusátadás egy $+x$ irányú lézersugárral

Ha a foton nem szemből, hanem az atommal azonos irányból érkezik, teljesen hasonló módon ellentétes előjelű eredményeket kapunk az átlagos energia- és impulzusátadásra:

$$\Delta p^+ \approx \frac{\hbar\omega_L'}{c}, \qquad \Delta\varepsilon^+ \approx \frac{\hbar\omega_L' v}{c}. \tag{14}$$

II. rész: Disszipáció és az optikai szirup alapjai

A feladat közlése szerint a laboratóriumban *nyugalomban* levő atomok

$$P_\mathrm{g}(\omega_L) = \frac{N_\mathrm{g}}{N} = \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0-\omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2}. \tag{15}$$

valószínűséggel találhatók gerjesztett állapotban az ω_L frekvenciájú fotonokkal való kölcsönhatás eredményeként. A képletben Ω_R az úgynevezett Rabi-frekvencia, melynek négyzete a lézer intenzitásával arányos, Γ pedig az adott átmenet élettartamának reciproka. Látható, hogy ez a valószínűség $\omega_L = \omega_0$ esetén maximális, nem haladja meg az $\frac{1}{2}$ értéket, és $|\omega_L - \omega_0| \gg \Gamma, \Omega_R$ esetén gyorsan csökken.

7. A lézer által az atomnyalábra kifejtett erő

A (15) képlet nyugalomban levő atomokra vonatkozik, tehát csak úgy használhatjuk, ha áttérünk az atomokkal együtt v sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe. Ekkor azonban Doppler-eltolódás miatt a $-x$ irányban haladó fotonok frekvenciáját $\omega^- = \omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)$-nek, míg a $+x$ irányban haladókét $\omega^+ = \omega_L\left(1-\frac{v}{c}\right)$-nek észleljük. Mindkét fotonnyaláb egymástól függetlenül gerjeszti az atomok $N_\mathrm{g} = NP_\mathrm{g}$ részét, így időegységenként ΓN_g elnyelési–kibocsátási folyamat megy végbe a balra, illetve jobbra haladó fotonokkal. Felhasználva a (13) és (14) eredményeket, a keresett erő:

$$F = \Gamma N\big(P_\mathrm{g}(\omega^-)\Delta p^- + P_\mathrm{g}(\omega^+)\Delta p^+\big) =$$

$$= \frac{\Omega_R^2 N\Gamma\hbar\,\frac{\omega_L}{c}}{\left(\omega_0-\omega_L\left(1-\frac{v}{c}\right)\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2 N\Gamma\hbar\,\frac{\omega_L}{c}}{\left(\omega_0-\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}.$$

8. Kissebességű határeset

Az erőre kapott formula

$$F = \frac{A}{B+C} - \frac{A}{B-C} \approx \frac{A}{B}\left(1-\frac{C}{B}-\left(1+\frac{C}{B}\right)\right) = -\frac{2AC}{B^2}$$

alakú, ahol $C \ll B$. A számolást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$F \approx -\frac{4\Omega_R^2 N\Gamma\hbar\left(\frac{\omega_L}{c}\right)^2}{\left((\omega_0-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_0-\omega_L)v. \tag{16}$$

Látható, hogy az erő pozitív (gyorsító), ha $\omega_L > \omega_0$, zérus, ha $\omega_L = \omega_0$, és negatív (lassító), ha $\omega_L < \omega_0$. Természetesen a jelenség független az x tengely irányításától, tehát ha a lézer frekvenciáját kicsit az átmenet „alá hangoljuk”, akkor mindig az atom mozgásával ellentétes irányú a fotonok által kifejtett erő.

9. Optikai szirup

Ha az atomokra sebességükkel arányos fékezőerő hat, akkor mozgásegyenletük $m\dot{v} = -\beta v$, ahol a $\beta > 0$ konstans a (16) egyenletből kiolvasható. Figyelembevéve a $v(0) = v_0$ kezdeti feltételt, az atomok sebessége a

$$v(\tau) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}\tau}$$

függvény szerint csökken. Az ekvipartíció-tétel értelmében $T \sim v^2$, tehát a hőmérséklet $T(\tau) = T_0 e^{-\frac{2\beta}{m}\tau}$ időfüggést mutat.