1. Impulzusmomentum-megmaradás

1a–1c. A Föld–Hold rendszer teljes impulzusmomentuma a Föld forgásából és a Hold keringéséből származó két tag összege. A feladat jelöléseit használva kezdetben az impulzusmomentum $L_1 = I_\mathrm{F}\omega_\mathrm{F1} + I_\mathrm{H1}\omega_\mathrm{H1}$, a folyamat végén pedig, amikor a Föld forgásának és a Hold keringésének szögsebessége megegyezik, $L_2 = I_\mathrm{F}\omega_2 + I_\mathrm{H2}\omega_2$. Az impulzusmomentum-megmaradás tétel értelmében $L_1 = L_2$, és L_2-ben a Föld impulzusmomentumát elhanyagolva azt kapjuk, hogy

$$L_1 = I_\mathrm{F}\omega_\mathrm{F1} + I_\mathrm{H1}\omega_\mathrm{H1} = I_\mathrm{H2}\omega_2. \tag{1}$$

(Emlékeztetőül, az impulzusmomentumot L, a tehetetlenségi nyomatékot I, a szögsebességet ω jelöli. Az 1 index a kezdeti állapotra, 2 a végső állapotra, F a Földre, H pedig a Holdra utal.)

2. Végső pályasugár és szögsebesség a Föld–Hold rendszerben

2a–2c. Feltételezve, hogy a Hold a végső helyzetben is körpályán kering a Föld körül, mozgásegyenletére (rendezés után) az adódik, hogy $\omega_2^2 D_2^3 = GM_\mathrm{F}$, ahol D_2 a végső pályasugár, G a gravitációs állandó, M_F pedig a Föld tömege. Felhasználva az L_1-re kapott (1) összefüggést, valamint hogy $I_\mathrm{H2} = M_\mathrm{H} D_2^2$, a végső pályasugarat és szögsebességet könnyen kifejezhetjük a kért mennyiségekkel:

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_\mathrm{F}M_\mathrm{H}^2}, \qquad \omega_2 = \frac{G^2M_\mathrm{F}^2M_\mathrm{H}^3}{L_1^3}. \tag{2}$$

2d–2e. Közismert, hogy az R sugarú, M tömegű homogén gömb tehetetlenségi nyomatéka $\frac{2}{5}MR^2$. Ennek felhasználásával, a feladatban leírt modell alapján a Föld tehetetlenségi nyomatéka

$$I_\mathrm{F} = \frac{2}{5}\,\frac{4\pi}{3}\left(r_1^5\varrho_1 + \left(r_0^5 - r_1^5\right)\varrho_0\right) = 8{,}0\cdot 10^{37}\ \mathrm{kg\ m^2}.$$

(Az első tag az r_1 sugarú, ϱ_1 sűrűségű belső mag járuléka, míg a második tag az r_0 külső sugarú, ϱ_0 sűrűségű külső köpeny járuléka.)

2f–2h. A feladatban megadott adatokat a már felírt (1)–(2) formulákba behelyettesítve a keresett számértékek könnyen meghatározhatók:

$$L_1 = 3{,}4\cdot 10^{34}\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}},$$

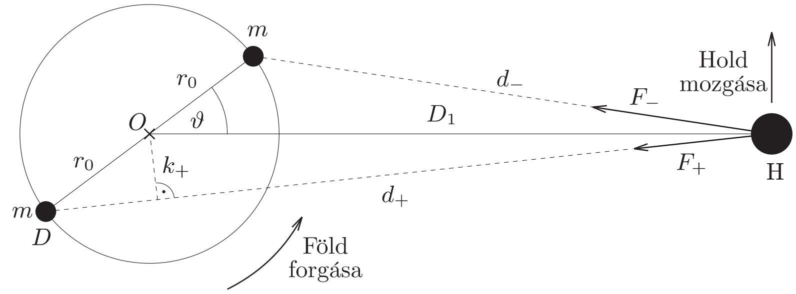
$$D_2 = 5{,}4\cdot 10^{8}\ \mathrm{m}, \qquad \text{tehát}\ \ D_2 = 1{,}4D_1,$$

$$\omega_2 = 1{,}6\cdot 10^{-6}\ \frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \text{így a periódusidő 46 nap.}$$

2i. A végső helyzetben a Föld impulzusmomentuma $I_\mathrm{F}\omega_2 = 1{,}3\cdot 10^{32}\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}}$, míg a Holdé $I_\mathrm{H2}\omega_2 = 3{,}4\cdot 10^{34}\ \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}}$, ami közel 260-szorosa a Földének, tehát a számolás elején tett elhanyagolás valóban jogos volt.

3. Mennyivel távolodik a Hold évenként?

A Földön levő vízréteg szabad felszíne állandó gravitációs potenciálú felületen helyezkedik el. Ha csak a Föld gravitációs terét vennénk figyelembe, akkor az ekvipotenciális felületek koncentrikus gömbök lennének. A Hold gravitációs terének hatására e gömbök deformálódnak; a Föld Hold felé eső, és azzal átellenesen elhelyezkedő pontjukban „kitüremkedések” jönnek létre. (Ezeknek a kitüremkedéseknek a forgó Földhöz képesti mozgását érzékeljük árapályként.) A Föld forgása miatt a kitüremkedések kicsiny $\vartheta > 0$ szöggel kifordulnak a Föld–Hold egyenesből. A feladat szerinti modellben a kitüremkedéseket két m tömegű tömegponttal helyettesítjük, melyek a Föld felszínének átellenes pontjaiban helyezkednek el, ahogy az *1. ábrán* látható.



1. ábra

Mivel $\vartheta > 0$, a két égitest forgatónyomatékot fejt ki egymásra, mely a Föld forgását lassítja, a Hold pályamenti impulzusmomentumát pedig növeli.

3a–3f. Az egyszerű modell alapján könnyen kiszámolhatjuk két tömegpont Holdra ható forgatónyomatékát.

A koszinusztétel alapján a tömegpontok távolsága a Holdtól

$$d_\pm = D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1 r_0 \cos\vartheta,$$

tehát a tömegpontok és a Hold közti gravitációs erő

$$F_\pm = \frac{GmM_\mathrm{H}}{d_\pm}.$$

Az ODH háromszög területét kétféleképpen fölírva $\frac{1}{2}r_0 D_1 \sin\vartheta = \frac{1}{2}k_+ d_+$, ahonnan az F_+ erőhöz tartozó erőkar

$$k_+ = \frac{r_0 D_1 \sin\vartheta}{d_+}.$$

Hasonló formula kapható a másik erőkarra is, így a két tömegpont által kifejtett forgatónyomaték:

$$\tau_\pm = F_\pm k_\pm = \frac{GmM_\mathrm{H} r_0 D_1 \sin\vartheta}{\left(D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1 r_0 \cos\vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Egyszerűsítsünk D_1^3-el és alkalmazzuk az $(1+\varepsilon)^a \approx 1+\varepsilon a$ közelítő formulát, mely $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes, figyelembe véve, hogy esetünkben $\frac{r_0}{D_1} \ll 1$.

$$\tau_\pm = \frac{GmM_\mathrm{H} r_0 \sin\vartheta}{D_1^2}\left(1 + \frac{r_0^2}{D_1^2} \pm 2\frac{r_0}{D_1}\cos\vartheta\right)^{-\frac{3}{2}} \approx$$

$$\approx \frac{GmM_\mathrm{H} r_0 \sin\vartheta}{D_1^2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_0^2}{D_1^2} \mp 3\frac{r_0}{D_1}\cos\vartheta\right).$$

A fenti közelítéssel élve a Holdra ható, keringését gyorsító eredő forgatónyomaték:

(3) $$\tau = \tau_- - \tau_+ \approx \frac{6GmM_\mathrm{H} r_0^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{D_1^3} = 4,1 \cdot 10^{16}\ \mathrm{Nm}.$$

3g–3h. A Föld körül körpályán keringő Hold mozgásegyenlete

$$\frac{GM_\mathrm{F} M_\mathrm{H}}{D^2} = M_\mathrm{H} D \omega_\mathrm{H}^2,$$

ahonnan a Hold szögsebessége $\omega_\mathrm{H} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{F}}{D^3}}$. Ennek felhasználásával a Hold impulzusmomentuma a keringési sugárral kifejezve:

(4) $$L_\mathrm{H} = I_\mathrm{H}\omega_\mathrm{H} = M_\mathrm{H}\sqrt{DGM_\mathrm{F}}.$$

Ez az összefüggés fönnáll az impulzusmomentum és a pályasugár jelenlegi L_H1 és D_1 értéke mellett is, és Δt idővel később is, amikor az impulzusmomentum értéke a τ forgatónyomaték hatására $L_\mathrm{H1} + \tau\Delta t$ lesz, a Hold pályasugara pedig $D_1 + \Delta D$-re nő. Mivel

$$\sqrt{D+\Delta D} \approx \sqrt{D} + \frac{\Delta D}{2\sqrt{D}},$$

azért a (4) összefüggésben a két oldal megváltozására azt kapjuk, hogy

$$\Delta L_{1M} = \tau\Delta t = \frac{M_\mathrm{H}}{2}\sqrt{\frac{GM_\mathrm{F}}{D_1}}\Delta D.$$

Innen ΔD-t kifejezve, és $\Delta t = 1\,\text{év} = 3,1 \cdot 10^7$ s értékkel számolva a Hold jelenlegi éves távolodására azt kapjuk, hogy

(5) $$\Delta D_1 = \frac{2\tau\Delta t}{M_\mathrm{H}}\sqrt{\frac{D_1}{GM_\mathrm{F}}} = 0{,}034\ \mathrm{m} = 3{,}4\ \mathrm{cm}.$$

A (3) formulával megadott τ forgatónyomaték csökkenti a Föld impulzusmomentumát, $\Delta L_\mathrm{F} = -\tau\Delta t = I_\mathrm{F}\Delta\omega_\mathrm{F}$, ahonnan $\Delta t = 1$ év alatt a jelenlegi szögsebesség-változás:

(6) $$\Delta\omega_\mathrm{F1} = -\frac{\tau\Delta t}{I_\mathrm{F}} = -1{,}6 \cdot 10^{-14}\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Mivel a periódusidő $T_{\mathrm{F}} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, a nap hossza egy év alatt

$$\Delta T_{\mathrm{F}} = 2\pi\left(\frac{1}{\omega+\Delta\omega} - \frac{1}{\omega}\right) \approx -\frac{2\pi}{\omega^2}\Delta\omega = 1{,}9\cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

értékkel nő.

4. Hová lesz az energia?

4a–4b. Korábban (a 3g. pontban) láttuk, hogy a körpályán keringő Hold szögsebessége

$$\omega_{\mathrm{H1}} = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{F}}}{D_1^3}}.$$

Ezt felhasználva a Föld–Hold rendszer mechanikai energiája jelenleg:

$$E = \frac{I_{\mathrm{F}}\omega_{\mathrm{F1}}^2}{2} + \frac{I_{\mathrm{H}}\omega_{\mathrm{H1}}^2}{2} - \frac{GM_{\mathrm{F}}M_{\mathrm{H}}}{D_1} = \frac{I_{\mathrm{F}}\omega_{\mathrm{F1}}^2}{2} - \frac{GM_{\mathrm{F}}M_{\mathrm{H}}}{2D_1}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\Delta(\omega^2) = (\omega+\Delta\omega)^2 - \omega^2 \approx 2\omega\Delta\omega, \quad \text{és} \quad \Delta\left(\frac{1}{D}\right) = \frac{1}{D+\Delta D} - \frac{1}{D} \approx -\frac{\Delta D}{D^2},$$

valamint felhasználva az (5)–(6) eredményeket, az egy év alatt bekövetkező energiaváltozás:

$$\Delta E = I_{\mathrm{F}}\omega_{\mathrm{F1}}\Delta\omega_{\mathrm{F1}} + \frac{GM_{\mathrm{F}}M_{\mathrm{H}}}{2D_1^2}\Delta D_1 = -9{,}0\cdot 10^{19}\ \mathrm{J}. \tag{7}$$

4c–4d. A Föld teljes felszínét $h = 0{,}5$ m vastagon beborító vízréteg tömege:

$$M_{\text{víz}} = 4\pi r_0^2 h\varrho_{\text{víz}} = 2{,}6\cdot 10^{17}\ \mathrm{kg}.$$

A víz viszkozitása miatt egy év alatt disszipálódott energia:

$$\Delta E_{\text{víz}} = -gM_{\text{víz}}h\cdot 2\cdot 365\cdot 0{,}1 = -9{,}3\cdot 10^{19}\ \mathrm{J},$$

ami jól egyezik a (7) egyenletben kapott energiacsökkenéssel.