

I. megoldás. A tetraéder csúcsainak a metsző síkon lévő merőleges vetületei legyenek A' , B' , C' és D' , a csúcsoknak a metsző síktól vett távolságát pedig jelölje rendre d_A , d_B , d_C , d_D . (Ha ezen távolságok valamelyike 0, akkor az állítás nyilvánvaló.) Ekkor az $AA'K$ és $BB'K$ derékszögű háromszögek megfelelő szögeik egyenlősége miatt hasonlóak, tehát

$$\frac{AK}{BK} = \frac{d_A}{d_B}$$

és ugyanígy kapjuk, hogy

$$\frac{BL}{CL} = \frac{d_B}{d_C}, \quad \frac{CM}{DM} = \frac{d_C}{d_D} \quad \text{és} \quad \frac{DN}{AN} = \frac{d_D}{d_A}.$$

Vagyis $AK \cdot BL \cdot CM \cdot DN = BK \cdot CL \cdot DM \cdot AN$.

Szorozzuk meg mindkét oldalt az

$$\frac{AK \cdot BL \cdot CM \cdot DN}{(AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD)^2}$$

törttel, majd a jobb oldalt alakítsuk át felhasználva, hogy $BK = AB - AK$, $CL = BC - BL$, $DM = CD - CM$ és $AN = AD - DN$, végül pedig alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{AK \cdot BL \cdot CM \cdot DN}{AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD} \right)^2 = \\ &= \frac{AK(AB - AK)}{AB^2} \cdot \frac{BL(BC - BL)}{BC^2} \cdot \frac{CM(CD - CM)}{CD^2} \cdot \frac{DN(AD - DN)}{AD^2} \leq \\ &\leq \left(\frac{AK + (AB - AK)}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{AB^2} \cdot \left(\frac{BL + (BC - BL)}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{BC^2} \\ &\quad \cdot \left(\frac{CM + (CD - CM)}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{CD^2} \cdot \left(\frac{DN + (AD - DN)}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{AD^2} = \left(\frac{1}{2^2} \right)^4. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalából négyzetgyököt vonva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

II. megoldás. Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a metsző sík egyenlete $Z = 0$ legyen. Vetítsük a feladatban szereplő pontokat merőlegesen a z tengelyre, tetszőleges T pont vetülete legyen T' . A merőleges vetítés osztóviszonytartó, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$\frac{A'K'}{A'B'} \cdot \frac{B'L'}{B'C'} \cdot \frac{C'M'}{C'D'} \cdot \frac{D'N'}{A'D'} \leq \frac{1}{16}.$$

Ha a metsző sík átmegy a tetraéder valamelyik csúcsán, akkor az egyenlőtlenség nyilván teljesül, mert a bal oldali törtek egyike 0. Ha a sík egyik csúcson sem megy át, akkor az A és C csúcsok a sík egyik, a B és D csúcsok pedig a sík másik oldalán helyezkednek el. Mivel a metsző sík merőleges a z tengelyre, azért ugyanez igaz az A' , C' , illetve a B' , D' pontokra is. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy A' és C' harmadik koordinátái pozitívak, míg B' és D' harmadik koordinátái negatívak. Tehát $A'(0, 0, a)$, $B'(0, 0, -b)$, $C'(0, 0, c)$ és $D'(0, 0, -d)$ alkalmas pozitív a , b , c , d számokkal. Mivel $K' \equiv L' \equiv M' \equiv N' = (0, 0, 0)$,

$$\frac{A'K'}{A'B'} = \frac{a}{a+b}, \quad \frac{B'L'}{B'C'} = \frac{b}{b+c}, \quad \frac{C'M'}{C'D'} = \frac{c}{c+d} \quad \text{és} \quad \frac{D'N'}{A'D'} = \frac{d}{d+a}.$$

Tehát azt kell bizonyítanunk, hogy tetszőleges pozitív a , b , c , d számok esetén fennáll az

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{b+c} \cdot \frac{c}{c+d} \cdot \frac{d}{d+a} \leq \frac{1}{16}$$

egyenlőtlenség. Ez viszont egyszerűen következik a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségek átrendezéséből adódó

$$\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{cd}}{c+d} \leq \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{da}}{d+a} \leq \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségek szorzásából.

A bizonyításból az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha a metsző sík a tetraéder négy élfelezőpontján megy át.