

**Megoldás.** Vegyük az 5 cm-t egységnek. Tegyük fel, hogy egy téglatestet kiraktunk  $1 \times 2 \times 4$ -es kis téglákból. Nyilván minden kis téglát élével párhuzamosan a téglatest élével.

Először megmutatjuk, hogy ha a téglatest mérete  $a \times 2b \times 4c$ , ahol  $a, b, c$  pozitív egészek, akkor az felépíthető kis téglákból. Készítsünk  $a$  db kis téglából  $bc$  db  $a \times 2 \times 4$  méretű téglatestet, ezekből  $b$  darabot helyezünk egymás mellé úgy, hogy a 2 egység hosszú éleiket illesszük össze, majd ezt még  $(c-1)$ -szer ismételjük meg. Így  $c$  db  $a \times 2b \times 4$  méretű téglatestet kapunk, amiket egymásra helyezve összeáll az  $a \times 2b \times 4c$  nagyságú téglatest.

Megmutatjuk, hogy más méretű téglatest nem építhető a kis téglákból. Mivel a kis téglák minden oldallapjának a területe páros, és a téglatest minden oldallapja ilyen téglalapokból van kirakva, a téglatest minden oldallapjának területe is páros. Tehát a téglatestnek nem lehet két páratlan hosszúságú nem párhuzamos éle. Ha megmutatjuk, hogy valamelyik él hossza 4-gyel is osztható, akkor készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Mivel mindegyik kis téglát térfogata 8, a téglatest térfogata is osztható 8-cal. Ez csak úgy lehet, ha mindhárom él hossza páros szám, vagyis az élek hossza  $2d, 2e, 2f$  alakban írható alkalmas  $d, e, f$  páratlan számokkal. Bontsuk fel a téglatestet az élével párhuzamosan  $2 \times 2 \times 2$ -es kockákra, majd ezeket a kockákat fessük sakkáblaszerűen fehérre és feketére úgy, hogy minden kocka csak vele ellentétes színű kockákkal érintkezzen lapban (lásd első borító). Ezután a  $def$  db  $2 \times 2 \times 2$ -es kockát bontsuk tovább  $1 \times 1 \times 1$ -es kis kockákra. Minden  $1 \times 2 \times 4$ -es téglát két lapban szomszédos kockából tartalmaz 4-4 kis kockát, azaz minden téglát azonos számú fehér és fekete  $1 \times 1 \times 1$ -es kis kockát tartalmaz. Vagyis a téglatest is azonos számú fehér és fekete  $1 \times 1 \times 1$ -es kis kockát tartalmaz. Viszont a nagy kockák száma,  $def$  feltevésünk szerint páratlan, ezért a téglatestben egyezhet meg a fehér és a fekete kis kockák száma. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.