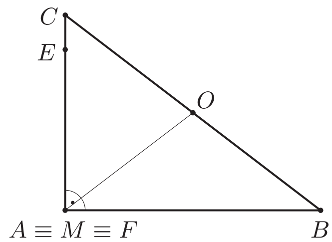
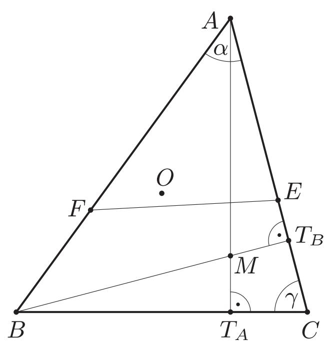
I. megoldás. Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon α, β és γ-val, a magasságvonalak talppontjait T_A, T_B és T_C-vel, a körülírt kör sugarát pedig R-rel.

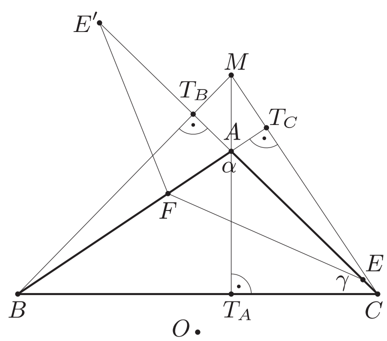
Ha $\alpha = 90°$, akkor $M = A = F$ és az állítás nyilvánvaló (*1. ábra*). Ha α nem derékszög, akkor megkülönböztetjük az $\alpha < 90°$ (*2. ábra*) és az $\alpha > 90°$ (*3. ábra*) eseteket. Ez utóbbi esetben az EAF háromszög A-nál lévő szöge tompaszög, ezért a vele szemben lévő EF a háromszög legnagyobb oldala. Azaz $EF > AE = AO = R$, vagyis ekkor a feladat állítása nem igaz. Ha viszont úgy módosítjuk a feladatot, hogy $\alpha > 90°$ esetén az ABC háromszög CA oldalának A-n túli meghosszabbításán vesszük fel azt az E' pontot, melyre $AE' = AO = R$ (*3. ábra*), akkor erre a pontra teljesül, hogy $E'F = AO$.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A módosított feladat bizonyítása nagyon hasonló a két esetben, ezért ahol lehet, egyszerre tárgyaljuk a két lehetőséget, de vannak apró eltérések, ezeknél külön-külön kell megvizsgálnunk a hegyes-, illetve a tompaszögű háromszöget.

Az ABC háromszögben az általánosított szinusztétel szerint $AB = 2R\sin\gamma$. Az AT_BB derékszögű háromszög B-nél lévő szöge $90° - \alpha$, illetve $\alpha - 90°$. Ezért

$$AT_B = AB\sin(90° - \alpha) = 2R\sin\gamma\cos\alpha,$$

illetve

$$AT_B = AB\sin(\alpha - 90°) = 2R\sin\gamma(-\cos\alpha).$$

Az AT_AC derékszögű háromszög A-nál lévő szöge $90° - \gamma$. Ez a szög a hegyesszögű esetben egyúttal az AMT_B derékszögű háromszög A-nál lévő szöge is, a tompaszögű esetben pedig $MAT_B\sphericalangle$ és $T_AAC\sphericalangle$ csúcsszögek. Ezért

$$AM = \frac{AT_B}{\cos(90° - \gamma)} = \frac{2R\sin\gamma(\pm\cos\alpha)}{\sin\gamma} = \pm 2R\cos\alpha.$$

Mindkét esetben igaz, hogy $AF = AM$ és $AE = AE' = R$. Ha α hegyesszög, akkor írjuk fel az AEF háromszög EF oldalára a koszinusztételt:

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos\alpha = \\ = R^2 + 4R^2\cos^2\alpha - 2R \cdot (2R\cos\alpha) \cdot \cos\alpha = R^2,$$

tehát $EF = R$, ami épp a bizonyítandó állítás.

Ha pedig α tompaszög, akkor az $AE'F$ háromszög A-nál lévő szöge $180^\circ - \alpha$, ezért ebben a háromszögben a koszinusztétel szerint

$$E'F^2 = AE'^2 + AF^2 - 2AE' \cdot AF\cos(180^\circ - \alpha) = \\ = R^2 + 4R^2\cos^2\alpha - 2R \cdot (-2R\cos\alpha) \cdot (-\cos\alpha) = R^2,$$

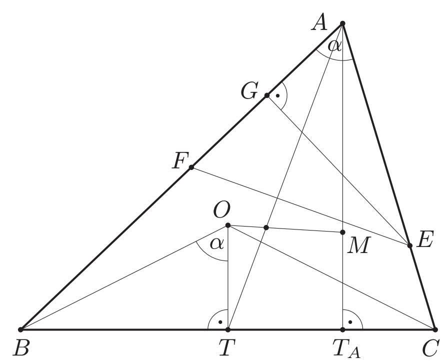
tehát erre a pontra teljesül, hogy $E'F = AO$.

II. megoldás. Csak hegyesszögű háromszög esetén bizonyítjuk az állítást. (Az olvasóra hagyjuk annak meggondolását, hogy az I. megoldásban kimondott, tompaszögű háromszögekre vonatkozó módosított állítást hogyan lehet a következő bizonyítás apró változtatásával belátni.)

Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá az ABC háromszög súlypontja S, a BC oldal felezőpontja T, az E pontnak az AB egyenesen lévő merőleges vetülete pedig G. Az ABC háromszög körülírt körében a rövidebbik BC ívhez tartozó kerületi szög α, ezért középponti és a kerületi szögek közti összefüggés alapján $BOC\sphericalangle = 2\alpha$. Mivel O a BC szakaszfelező merőlegesén van,

$$BOT\sphericalangle = \frac{BOC\sphericalangle}{2} = \alpha.$$

Tehát a BOT és EAG derékszögű háromszögek egybevágóak, mert két-két szögük és az átfogójuk ($BO = R = EA$) megegyezik. Ezért $OT = AG$ is teljesül (*4. ábra*).



4. ábra

Tudjuk, hogy az O, S és M pontok az ABC háromszög Euler-egyenesén vannak és $2OS = SM$. Az SOT és SMA ($AB = AC$ esetén elfajuló) háromszögek hasonlóak, mert megfelelő oldalaik párhuzamossága (OT és AM merőleges BC-re) miatt a megfelelő szögeik egyenlőek. A hasonlóság aránya $\dfrac{OS}{SM} = \dfrac{1}{2}$ miatt $1:2$, tehát

$$AG = OT = \frac{AM}{2}.$$

Vagyis $AG = \dfrac{AF}{2}$. Mivel EG merőleges az AB egyenesre, az A pont EG-re vonatkozó tükörképe F. Ebből viszont az is következik, hogy az EA szakasz EG-re vonatkozó tükörképe az EF szakasz.

Tehát $EF = EA = OA$, ami épp a bizonyítandó állítás.