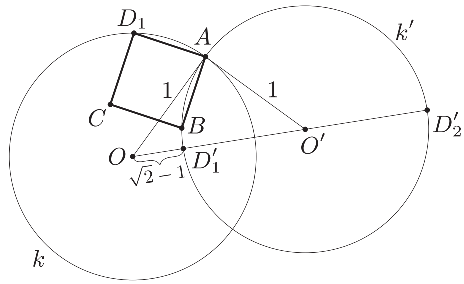
I. megoldás. A négyzet másik két csúcsa a kör középponttól ugyanolyan távolságra van a szimmetria miatt. Az egyszerű megoldás kulcsa a feladat következő átfogalmazása:

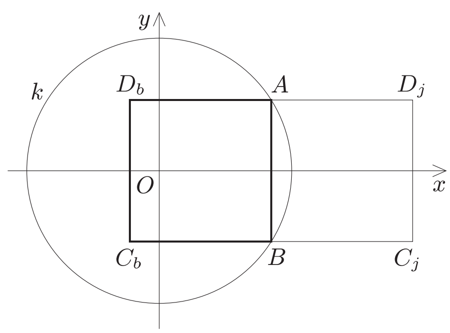
Adott egy egység sugarú k kör és annak egy A pontja. A pozitív körüljárású $ABCD$ négyzet B csúcsa a k körre illeszkedik. Mi a D csúcsnak a kör O középpontjától való lehetséges legkisebb és legnagyobb távolsága?

A D csúcsot a B-ből A körüli pozitív irányú $90°$-os forgatással kapjuk. Ezért amikor a B csúcs befutja a k kör A-tól különböző pontjait, a D csúcs mértani helye azon O' középpontú k' kör A-tól különböző pontjaiból áll, amelyet a k-ból ugyancsak A körüli pozitív irányú $90°$-os forgatás hoz létre (*1. ábra*). Az extremális helyzetben lévő D pontok az OO' egyenesen helyezkednek el. Mivel az OAO' háromszög egyenlőszárú és derékszögű, azért $OO' = \sqrt{2}$. Tehát a D pontnak O-tól való lehetséges legkisebb távolsága $\sqrt{2}-1$, lehetséges legnagyobb távolsága pedig $\sqrt{2}+1$.



1. ábra

II. megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az origó az adott kör O középpontja legyen, a négyzet körre illeszkedő két csúcsának koordinátái pedig $A(\cos t, \sin t)$ és $B(\cos t, -\sin t)$ legyenek, ahol $0 < t \le \pi/2$ (*2. ábra*).



2. ábra

Ekkor a négyzet oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, hosszuk pedig $2\sin t$. Ezért a másik két csúcs koordinátái vagy $C_j(\cos t + 2\sin t, -\sin t)$ és $D_j(\cos t + 2\sin t, \sin t)$, vagy pedig $C_b(\cos t - 2\sin t, -\sin t)$ és $D_b(\cos t - 2\sin t, \sin t)$, attól függően, hogy a csúcsok az AB egyenesnek O-val megegyező, vagy azzal ellentétes oldalán vannak. Nyilván igaz, hogy $OC_j = OD_j \ge OC_b = OD_b$, ezért a távolság maximumát az OC_j, minimumát pedig az OD_b típusú szakaszok közt kell keresnünk. Mivel a pozitív számok körében a négyzetreemelés megtartja a nagyság szerinti rendezést, elég a távolságok négyzetének szélsőértékeit meghatároznunk. Vagyis egyrészt az

$$OC_j^2 = \big(0 - (\cos t + 2\sin t)\big)^2 + (0 + \sin t)^2 = c(t)$$

függvény legnagyobb, másrészt az

$$OD_b^2 = \big(0 - (\cos t - 2\sin t)\big)^2 + (0 - \sin t)^2 = d(t)$$

függvény legkisebb értékét kell meghatároznunk, mindkétszer a $0 < t \le \pi/2$ intervallumon.

Ismert trigonometriai azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c(t) &= (\cos t + 2\sin t)^2 + \sin^2 t = 1 + 4\sin^2 t + 4\sin t\cos t = \\ &= 1 + 4\sqrt{2}\sin t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right) = 1 + 4\sqrt{2}\sin t\sin(t+\pi/4) = \\ &= 1 + 2\sqrt{2}\big(\cos\big(t - (t+\pi/4)\big) - \cos\big(t + (t+\pi/4)\big)\big) = \\ &= 1 + 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(2t+\pi/4)\right) = 3 - 2\sqrt{2}\cos(2t+\pi/4), \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
d(t) &= (\cos t - 2\sin t)^2 + \sin^2 t = 1 + 4\sin^2 t - 4\sin t\cos t = \\
&= 1 + 4\sqrt{2}\sin t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right) = 1 + 4\sqrt{2}\sin t\sin(t - \pi/4) = \\
&= 1 - 2\sqrt{2}\big(\cos\big(t + (t - \pi/4)\big) - \cos\big(t - (t - \pi/4)\big)\big) = \\
&= 1 - 2\sqrt{2}\left(\cos(2t - \pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 - 2\sqrt{2}\cos(2t - \pi/4).
\end{aligned}$$

Mivel minden x értékre igaz, hogy $-1 \le \cos x \le 1$, azért

$$c(t) \le 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{és} \quad d(t) \ge 3 - 2\sqrt{2}.$$

Ha $0 < t \le \pi/2$, akkor mindkét egyenlőtlenségben pontosan egyszer áll fenn egyenlőség, $t = 3\pi/8$, illetve $t = \pi/8$ esetén. Tehát $c(t)$ maximuma $3 + 2\sqrt{2} = \big(1 + \sqrt{2}\,\big)^2$, $d(t)$ minimuma pedig $3 - 2\sqrt{2} == \big(\sqrt{2} - 1\big)^2$.

Vagyis a négyzet másik két csúcsának O-tól való távolsága legalább $\sqrt{2} - 1$ és legfeljebb $\sqrt{2} + 1$.

Megjegyzés. Az I., „egyszerű" megoldásra persze nehéz rájönni. A feladat „szokásos" megoldása a II. megoldás. Ebben a megoldásban a $c(t)$ és $d(t)$ függvények szélsőértékeit deriválással is meg lehet határozni.