

Éles András megoldása. A szöcske csak az O és S közötti szakaszokra léphet (és S -re biztos rálép). Megmutatjuk, hogy ha útjában legfeljebb $n - 1$ mező van, amire nem szabad lépnie, akkor végig tud menni az úton.

Feltehetjük, hogy $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Teljes indukcióval bizonyítunk n -re, $n = 1$ triviális. Ha $n = 2$, akkor $a_1 \notin M$, vagy $a_2 \notin M$, így a_1 , $a_1 + a_2$, vagy a_2 , $a_1 + a_2$ jó lesz. Legyen M legkisebb eleme d , ekkor $n > 2$ -re három eset állhat fenn:

I. $d < a_n$, $a_n \notin M$. Legyen a szöcske első lépése a_n , ekkor átugorja d -t, így az útjában legfeljebb $n - 2$ eleme marad n -nek, és $n - 1$ különböző lépése. Az indukciós feltétel értelmében innen a szöcske már be tudja fejezni az útját (indukció: $n - 1$).

II. $d < a_n$, $a_n \in M$. Tekintsük az alábbi $2n - 1$ darab páronként különböző számot:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \dots < a_{n-1} + a_n.$$

Mivel $|M| \leq n - 1$ és $a_n \in M$, azért a számok közül kiválasztható egy olyan $(a_i, a_i + a_n)$ pár, hogy semelyik sincs M -ben (különben $|M| \geq n$ lenne). Legyen a_i és a_n a szöcske első két lépése, ekkor átugorja az M -beli d -t és $d < a_n$ -et, így hátralévő útjában már csak legfeljebb $n - 3$ tiltott mező van, és $(n - 2)$ -t ugrik még, innen már be tudja fejezni az útját (indukciós feltétel, $(n - 2)$ -re).

III. $d \geq a_n$. Hagyjuk el a d -t az M -ből, és legyen a_n a szöcske első lépése, ami legális. További útjában (d -t nem számolva) $n - 1$ ugrás és legfeljebb $n - 2$ tiltott mező szerepel, így végig tud menni az úton (indukciós feltétel $(n - 1)$ -re) úgy, hogy d kivételével nem érinti M -et.

Ha d -t sem érinti, akkor a teljes útvonal jó, így készen vagyunk.

Ha d -t érinti, akkor $d \in M$ miatt $d \neq S$, így a szöcske fog még lépni d -ről, tegyük fel, hogy $(d + a_i)$ -be lép. Ekkor $d + a_i \notin M$ és utána sem lép rá M -beli elemre. $(d + a_i)$ -ig pedig legalább két ugrása van, mivel $d \geq a_n$ és a_n a legelső lépés, így $a_i \neq a_n$.

Rendezzük a teljes útvonalon csak a $d + a_i$ előtti ugrásokat olyan sorrendbe, hogy a_n legyen az utolsó ugrás. Ekkor az utolsó szám, amire a szöcske $d + a_i$ előtt ugrott:

$$d + a_i - a_n = d - (a_n - a_i) < d,$$

tehát $d + a_i$ előtt az átrendezett útvonalon már nincs tiltott pont, mert d -nél kisebb mindegyik.

Így ez az átrendezett útvonal egyetlen tiltott mezőt sem tartalmaz, az állítást igazoltuk.