

**Kornis Kristóf megoldása.** Legyen  $D'$  a  $D$  pont tükörképe a  $C$ -ből induló szögfelezőre. Ha  $O$  az  $ABC$  beírt körének középpontja,  $ODC \sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow ODK \sphericalangle = 45^\circ$ , hiszen  $DK$  felezi az  $ODC$  szöget. Viszont  $O$  és  $K$  is rajta van a  $C$ -ből induló szögfelezőn, így  $OD'K \sphericalangle = 45^\circ$  és  $D', E, OK$  egy oldalán vannak, tehát  $BEK \sphericalangle = 45^\circ$  miatt  $O, E, D'$  és  $K$  egy körön fekszenek.

Emiatt  $KED' \sphericalangle = KOD' \sphericalangle$ . Viszont  $KOD' \sphericalangle = KOD \sphericalangle$ , és ha  $BAC \sphericalangle = \alpha$ , akkor

$$EBC \sphericalangle = \frac{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2}, \quad ECB \sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

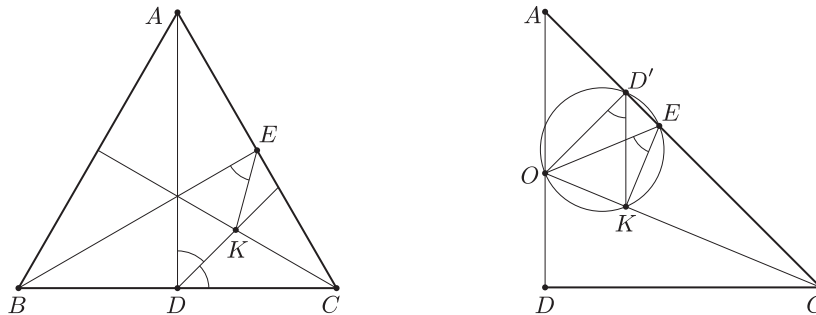
$$\Rightarrow KED' \sphericalangle = BED \sphericalangle - 45^\circ = 180^\circ - \frac{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2} - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - 45^\circ,$$

$$KOD \sphericalangle = 90^\circ - \left(\frac{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2}\right).$$

Mivel

$$KED' \sphericalangle = KOD \sphericalangle, \quad 45^\circ - \frac{90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ - \frac{\alpha}{2}}{2},$$

$$45^\circ = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$



A fenti számolással probléma lehet, ha  $D' = E$ , ugyanis ekkor nem beszélhetünk a  $KED' \sphericalangle$ -ről. Ha  $D' = E$ , akkor  $CD = CE$ , és ekkor ha az alap  $a$ , a szár  $b$  hosszú,

$$CD = \frac{a}{2}, \quad CE = \frac{a \cdot b}{a + b}, \quad \frac{a}{2} = \frac{a \cdot b}{a + b} \Rightarrow a^2 + ab = 2ab \Rightarrow a = b,$$

a háromszög szabályos. Ha viszont a háromszög szabályos,  $OECD$  deltoid, érintőnégyyszög, így az  $ACD$  háromszög beírt köre érinti  $BE$ -t is, tehát

$$BEK \sphericalangle = \frac{BEC \sphericalangle}{2}, \quad \text{de } BEC \sphericalangle = 90^\circ,$$

vagyis a  $BEK \sphericalangle$  ebben az esetben is  $45^\circ$  lesz.

Összefoglalva két megoldást kaptunk:  $CAB \sphericalangle = 90^\circ$ , vagy  $CAB \sphericalangle = 60^\circ$ .