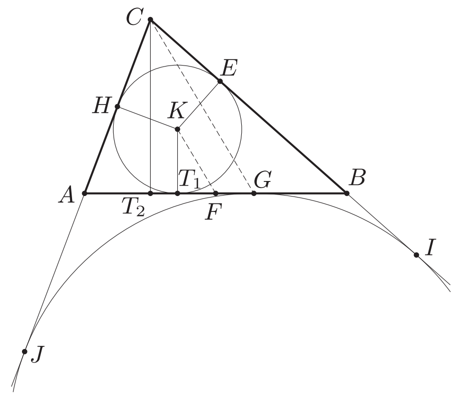
I. megoldás. A CG és KF szakaszok párhuzamosságát az őket tartalmazó T_2CG és a T_1KF háromszögek hasonlóságából látjuk be. A háromszög C csúcsából induló magasságának talppontja legyen T_2. A beírt kör AB oldalon lévő érintési pontja legyen T_1, a BC és AC oldalakon pedig E és H.



A körhöz egy külső pontból húzott érintő szakaszok egyenlők, ezért $CH = CE$, $AH = AT_1$, $BT_1 = BE$. Az *ábra* alapján látható, hogy

$$AT_1 = c - T_1B = AH,$$

$$CE = a - EB = a - BT_1 = CH,$$

$$AH + CH = b,$$

és $c - T_1B + a - T_1B = b$. Ebből

$$T_1B = \frac{c+a-b}{2}\,.$$

A hozzáírt kör érintési pontja az a oldal meghosszabbításán legyen az I, a b oldal meghosszabbításán pedig a J pont. Az érintőszakaszok egyenlőségéből az ábra alapján:

$IB = BG$, $GA = JA$, $CI = CJ$,

$$GA = c - GB = AJ, \quad CB + BI = CA + AJ, \quad \text{és} \quad a + GB = b + c - GB,$$

amiből

$$BG = \frac{b+c-a}{2}\,.$$

A CT_2B és CAT_2 háromszögekben felírva a Pithagorasz-tételt:

$$\begin{aligned} a^2 &= CT_2^2 + T_2B^2, \\ b^2 &= CT_2^2 + (c - T_2B)^2 = CT_2^2 + c^2 - 2cT_2B + T_2B^2. \end{aligned}$$

Az első egyenletből a másodikat kivonva: $a^2 - b^2 = -c^2 + 2cT_2B$. Ebből T_2B-t kifejezve:

$$T_2B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\,.$$

Így

$$T_1F = T_1B - FB = \frac{c+a-b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-b}{2}\,,$$

$$T_2G = T_2B - GB = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a^2-b^2}{2c} + \frac{c}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{a}{2} =$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{2c} + \frac{a-b}{2} = \frac{(a+b)(a-b)}{2c} + \frac{(a-b)c}{2c} = \frac{(a-b)(a+b+c)}{2c}\,.$$

A két szakasz aránya: $\dfrac{T_2G}{T_1F} = \dfrac{a+b+c}{c}$. Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva:

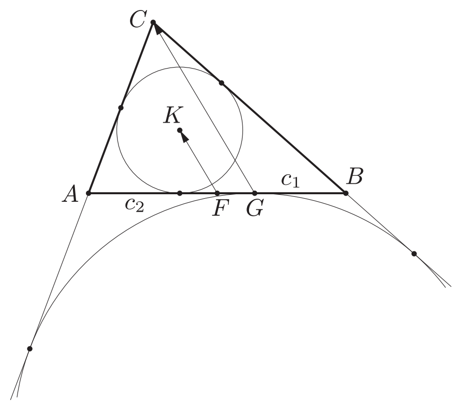
$$T = \frac{(a+b+c)\cdot KT_1}{2} = \frac{c \cdot T_2C}{2}\,,$$

amiből

$$\frac{T_2C}{KT_1} = \frac{a+b+c}{c}, \quad \text{tehát} \quad \frac{T_2C}{KT_1} = \frac{T_2G}{T_1F}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{T_2C}{T_2G} = \frac{T_1K}{T_1F}.$$

A $T_2CG\triangle$ és a $T_1KF\triangle$ két-két oldalának aránya és a közbezárt szögük megegyezik, ezért a két háromszög hasonló, így szögeik megegyeznek. Mivel 2-2 oldaluk párhuzamos, azért a harmadik oldalpár is párhuzamos lesz egymással, vagyis $FK \parallel GC$.

II. megoldás. Az *ábra* jelöléseit felhasználva az állítást vektorok segítségével igazoljuk. Legyen a három csúcs helyvektora $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$. Azt mutatjuk meg, hogy (alkalmas k számmal) $\overrightarrow{FK} = k \cdot \overrightarrow{GC}$, ami egyenértékű a feladat állításával.



Felhasználunk egy, a beírt kör középpontjának helyvektorára vonatkozó összefüggést:

$$\overrightarrow{K} = \frac{a\cdot\overrightarrow{A} + b\cdot\overrightarrow{B} + c\cdot\overrightarrow{C}}{a+b+c}\,.$$

Közismert, hogy $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$. Tudjuk továbbá, hogy a hozzáírt kör érintési pontja a c szakaszt két, c_1 és c_2 hosszúságú részre osztja, ezek hossza pedig a szokásos jelöléssel $c_1 = s - a = \dfrac{1}{2}(b+c-a)$, és $c_2 = s - b = \dfrac{1}{2}(a+c-b)$. Felhasználjuk az osztópont képletét:

$$\overrightarrow{G} = \frac{c_1\cdot\overrightarrow{A} + c_2\cdot\overrightarrow{B}}{c} = \frac{(b+c-a)\cdot\overrightarrow{A} + (a+c-b)\cdot\overrightarrow{B}}{2c}\,.$$

Most már felírhatjuk, hogy

$$\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{K} = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\big) - \frac{a\cdot\overrightarrow{A} + b\cdot\overrightarrow{B} + c\cdot\overrightarrow{C}}{a+b+c} =$$

$$= \frac{(a+b+c)\cdot\overrightarrow{A} + (a+b+c)\cdot\overrightarrow{B} - 2a\cdot\overrightarrow{A} - 2b\cdot\overrightarrow{B} - 2c\cdot\overrightarrow{C}}{2(a+b+c)} =$$

$$= \frac{(b+c-a)\cdot\overrightarrow{A} + (a+c-b)\cdot\overrightarrow{B} - 2c\cdot\overrightarrow{C}}{2(a+b+c)},$$

és

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{G} - \overrightarrow{C} = \frac{(b+c-a)\cdot\overrightarrow{A} + (a+c-b)\cdot\overrightarrow{B} - 2c\cdot\overrightarrow{C}}{2c}\,.$$

Könnyen látható, hogy $\overrightarrow{KF} = \dfrac{c}{a+b+c}\cdot\overrightarrow{CG}$. Ezt akartuk bizonyítani.