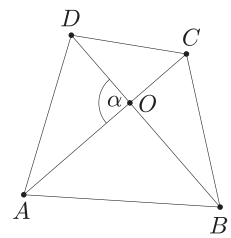
I. megoldás. A négyszög konvex, ezért O belső pont. Legyen az átlók szöge $\alpha \le 90°$. Feltehetjük, hogy $AOD\sphericalangle = \alpha$. Ekkor

$$BOC\sphericalangle = \alpha \quad \text{és} \quad AOB\sphericalangle = COD\sphericalangle = 180° - \alpha.$$



Mivel $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, a koszinusztételt az AOB, BOC, COD és DOA háromszögek O-val szemközti oldalára felírva kapjuk, hogy

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2AO \cdot BO \cos\alpha,$$
$$BC^2 = BO^2 + CO^2 - 2BO \cdot CO \cos\alpha,$$
$$CD^2 = CO^2 + DO^2 + 2CO \cdot DO \cos\alpha,$$
$$DA^2 = DO^2 + AO^2 - 2DO \cdot AO \cos\alpha.$$

Ezeket összeadva:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 =$$
$$= 2 \cdot (AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2) + 2 \cdot (AO - CO) \cdot (BO - DO) \cos\alpha.$$

Tehát a feladatban szereplő

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

összefüggés pontosan akkor teljesül, ha

$$2(AO - CO) \cdot (BO - DO) \cos\alpha = 0.$$

Mivel egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0, azért a feltétel pontosan akkor teljesül, ha $AO - CO$, $BO - DO$ és $\cos\alpha$ közül legalább az egyik 0. Vagyis ha O felezi valamelyik átlót, vagy pedig az átlók merőlegesek egymásra. Ez éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Az O pontból a négyszög csúcsaiba mutató vektorokat jelölje rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$. A vektorok skaláris szorzatának tulajdonságait használva ekkor a feladatban szereplő

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

összefüggés

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{d} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{d})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}^2)$$

alakba írható. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{cd} + \mathbf{da} = 0$, ami ekvivalens az

$$(\mathbf{a} + \mathbf{c})(\mathbf{b} + \mathbf{d}) = 0$$

összefüggéssel.

Ez pontosan akkor teljesül, ha vagy $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{c} = -\mathbf{a}$, tehát O az AC átló felezőpontja; vagy $\mathbf{b} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, tehát O a BD átló felezőpontja; vagy pedig az AC átlóval párhuzamos $\mathbf{a} + \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ vektor merőleges a BD átlóval párhuzamos $\mathbf{b} + \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ vektorra, azaz ha a négyszög átlói merőlegesek egymásra. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A II. megoldás lényegében ugyanaz, mint az I., mert az ott használt $AB^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2$ típusú összefüggések nem mások, mint a megfelelő háromszögekre vonatkozó koszinusztételek vektoros alakjai. Ebből a megoldásból viszont az is látszik, hogy a feladat állítása nem csak konvex négyszögre igaz.