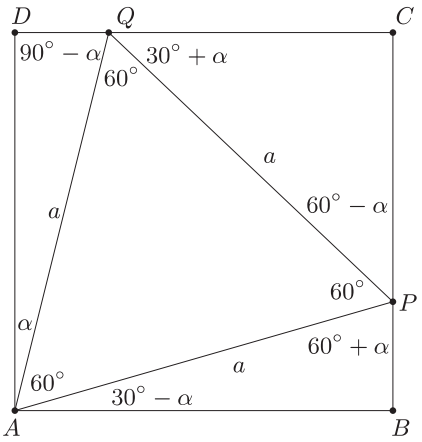
Megoldás. Legyen a szabályos háromszög oldala a hosszúságú és a $DAQ\sphericalangle$ nagysága α. Ekkor $DQA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$ és $PAB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha - 60^\circ = 30^\circ - \alpha$.

Ebből $APB\sphericalangle = 180^\circ - (30^\circ - \alpha + 90^\circ) = 60^\circ + \alpha$, és így

$$QPC\sphericalangle = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ + \alpha) = 60^\circ - \alpha.$$

A $CQP\sphericalangle$ nagysága $180^\circ - (90^\circ + 60^\circ - \alpha) = 30^\circ + \alpha$.



Az ABP derékszögű háromszögből

$$AB = a\cos(30^\circ - \alpha)$$

és

$$BP = a\sin(30^\circ - \alpha).$$

A PCQ háromszögből

$$PC = a\sin(30^\circ + \alpha)$$

és

$$CQ = a\cos(30^\circ + \alpha).$$

Végül a QDA háromszögből

$$QD = a\sin\alpha \quad \text{és} \quad DA = a\cos\alpha.$$

A bizonyítandó állítás:

(1)
$$t_{QDA} + t_{ABP} = t_{PCQ},$$

$$2t_{QDA} + 2t_{ABP} = 2t_{PCQ},$$

$$QD \cdot DA + AB \cdot BP = PC \cdot CQ,$$

Írjuk be az előbb kapott kifejezéseket:

$$a\sin\alpha \cdot a\cos\alpha + a\cos(30^\circ - \alpha) \cdot a\sin(30^\circ - \alpha) = a\sin(30^\circ + \alpha) \cdot a\cos(30^\circ + \alpha).$$

Mindkét oldalt osztva $a^2 \neq 0$-val és az addíciós tételeket használva:

$$\sin\alpha\cos\alpha + (\cos 30^\circ\cos\alpha + \sin 30^\circ\sin\alpha)(\sin 30^\circ\cos\alpha - \cos 30^\circ\sin\alpha) =$$

$$= (\sin 30^\circ\cos\alpha + \cos 30^\circ\sin\alpha)(\cos 30^\circ\cos\alpha - \sin 30^\circ\sin\alpha).$$

A zárójeleket felbontva és az egyenletet rendezve kapjuk, hogy:

$$\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2 30^\circ\cos\alpha\sin\alpha + 2\sin^2 30^\circ\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Felhasználva, hogy $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ és $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, kapjuk, hogy

$$\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

ami azonosság. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, az (1) egyenlőség teljesül.