I. megoldás. Nevezzük a 3×3-as kocka sarokkockáit A, az élek közepénél elhelyezkedő kockákat B, a lapok középpontjainál levő kockákat C kockáknak.

Ha az egér egy A kockában van, akkor a következő lépéssel biztosan B kockába kerül. B kockából $1/2$ valószínűséggel A, $1/2$ valószínűséggel pedig C kockába kerül. C kockából $4/5$ valószínűséggel lép B kockába, $1/5$ valószínűséggel pedig megtalálja a sajtot.

Ahhoz, hogy az egér C kockába kerüljön, biztosan páros sok lépésre van szükség, mivel ide B kockából lehet csak lépni, és az egér az 1. lépésben B kockába kerül, és innentől kezdve (amíg meg nem találja a sajtot) minden 2. lépésben B kockába kerül. A 3×3-as kocka közepébe C kockából lehet lépni, így ehhez páratlan sok, és legalább 3 lépésre van szükség. Az 1. lépés után az egér B kockában van. Vizsgáljuk meg, mekkora valószínűséggel találja meg 2 lépés múlva a sajtot. Először C-be, majd a kocka középpontjába kell lépnie, a fentiek szerint ennek valószínűsége

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}.$$

Ha az egér nem találta meg a sajtot, akkor 2 lépés után ismét B-ben van, ennek valószínűsége tehát

$$1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

A lépésszám várható értéke ezek alapján:

$$3\cdot\frac{1}{10}+5\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}+7\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}+9\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{10}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{10}\left(3+5\cdot\frac{9}{10}+7\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{10}\left[3\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right)+2\left(\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots\right)+2\left(\left(\frac{9}{10}\right)^3+\left(\frac{9}{10}\right)^4+\ldots\right)+\ldots\right]$$

A q hányadosú végtelen mértani sor összegképlete: $\dfrac{a_1}{1-q}$. Így

$$1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=10.$$

Így a keresett várható érték:

$$\frac{1}{10}\left[3\cdot 10+2\cdot\left(\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots\right)\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{10}\left[3\cdot 10+2\cdot\left(\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right)\cdot 10\right]=$$

$$=3+2\left(1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\ldots\right)\cdot\frac{9}{10}=3+2\cdot 10\cdot\frac{9}{10}=21.$$

II. megoldás. A középső egységkockához való eljutásig szükséges átlagos lépésszámot jelölje k, ha sarokkockából; l, ha élközépkockából; és m, ha lapközépkockából indulunk – feltéve, hogy ezek az átlagértékek valóban léteznek.

Mivel az egér sarokkockából indul, így a feladat k meghatározása.

Szomszédos kockáknak azokat tekintjük, amelyek rendelkeznek közös lappal. Sarokkockából indulva egy lépés után mindenképpen élközépkockához jutunk, így:

$$k=1+l. \tag{1}$$

Élközépkockából továbblépve $1/2$ valószínűséggel jutunk ismét sarokkockába, illetve $1/2$ valószínűséggel lapközépkockába:

$$l=1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m. \tag{2}$$

Ha lapközépkockába kerülünk, onnan 4/5 valószínűséggel juthatunk élközépkockába:

$$m = 1 + \frac{4}{5}l. \tag{3}$$

Az (1)-ben k-ra és (3)-ban m-re kapott kifejezést (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy:

$$l = 1 + \frac{1}{2}(1 + l) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{5}l\right),$$

amiből $l = 20$ és így $k = 21$.