

Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \geq 1$ egész számra

$$(1) \quad \frac{1}{n} \left(\cos^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cos^2 \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \cos^2 \frac{2n\pi}{2n+1} \right) = \frac{2n-1}{4n}.$$

Mit mondhatunk ennek alapján az $\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$ integrálról?