Megoldás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

$n = 0$-ra az állítás teljesül: $3 \mid 2 + 1$.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra. Ennek felhasználásával szeretnénk belátni, hogy ekkor $n = (k + 1)$-re is igaz, vagyis $3^{k+2} \mid 2^{3^{k+1}} + 1$. Az

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

azonosságot felhasználva:

$$2^{3^{k+1}} + 1 = \left(2^{3^k}\right)^3 + 1^3 = \left(2^{3^k} + 1\right)\left(\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1\right).$$

Az indukciós feltevés szerint $\left(2^{3^k} + 1\right)$ osztható 3^{k+1}-gyel, így már csak a szorzat másik tényezőjéről kell belátnunk, hogy osztható 3-mal.

$$\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1 = \left(2^{3^k} + 1\right)^2 - 3 \cdot 2^{3^k}.$$

Itt $\left(2^{3^k} + 1\right)^2$ osztható $\left(3^{k+1}\right)^2$-tel szintén az indukciós feltevés miatt, $3 \cdot 2^{3^k}$ pedig osztható 3-mal, így a kettő különbsége is osztható 3-mal.

Az állítás igaz $n = (k + 1)$-re is, ezzel minden természetes számra az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Többen a következő módon bizonyították, hogy $\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1$ osztható 3-mal: 3-mal nem osztható négyzetszám 3-mal osztva 1 maradékot ad, vagyis $\left(2^{3^k}\right)^2$ 3-mal osztva 1 maradékot ad; 2-nek páratlan kitevőjű hatványa 3-mal osztva 2 maradékot ad; és így $\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1$ valóban osztható 3-mal.

2. Sokan a $\left(2^{3^n}\right)^3 + 1 = \left(2^{3^n} + 1\right)^3 - 3\left(2^{3^n}\right)^2 - 3\left(2^{3^n}\right)$ azonosságot felhasználva bizonyították az állítást.

3. Legyen m pozitív egész, és a $0, 1, 2, \ldots, m - 1$ számok közül az m-hez relatív prímek számát jelölje $\varphi(m)$. Az *Euler–Fermat-tétel* szerint ekkor $a^{\varphi(m)} - 1$ osztható m-mel minden olyan a egészre, ami relatív prím az m-hez. Legyen $m = 3^{n+1}$; ekkor éppen azok a számok relatív prímek az m-hez, amelyek nem oszthatók 3-mal. Így $\varphi(3^{n+1}) = 3^{n+1} - 3^n = 2 \cdot 3^n$. Válasszuk az a-t például 2-nek, ekkor az Euler–Fermat-tétel szerint $2^{2 \cdot 3^n} - 1 = \left(2^{3^n} + 1\right)\left(2^{3^n} - 1\right)$ osztható 3^{n+1}-nel. A feladat állítása ebből azért következik, mert a második tényező még 3-mal sem osztható, hiszen 2-nek minden páratlan kitevőjű hatványa a 3-mal maradékosan osztva 2-t ad maradékul.