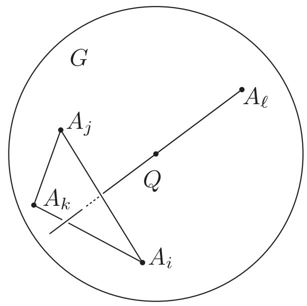
Megmutatjuk, hogy csak $n = 1$, $n = 2$ és $n = 4$ lehetséges, ezekhez az értékekhez könnyen található is megfelelő pontrendszer. Ha $n \geq 3$, akkor a feltétel szerint a $P_1$, $P_2$, $P_3$ pontokhoz találhatunk egy negyedik $P_\ell$-et is (amelyre az is igaz, hogy $Q$ a $P_1P_2P_3P_\ell$ tetraéder belső pontja), tehát az $n = 3$ eset nem lehetséges.

A továbbiakban feltételezzük, hogy $n \geq 4$.

Vegyünk fel egy $Q$ középpontú $G$ gömböt, és jelöljük $A_i$-vel a $QP_i$ félegyenes és $G$ metszéspontját ($1 \leq i \leq n$). Abból a feltételből, hogy a $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ pontok közül semelyik négy nincs egy síkban, következik, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ pontok közül semelyik három nincs egy síkban $Q$-val. Továbbá, tetszőleges $P_iP_jP_kP_\ell$ tetraéder pontosan akkor tartalmazza a belsejében $Q$-t, ha az $A_iA_jA_kA_\ell$ tetraéder is a belsejében tartalmazza $Q$-t. Emiatt bármely három különböző $A_i$, $A_j$, $A_k$ ponthoz található legalább egy olyan $A_\ell$ pont, amelyre $Q$ az $A_iA_jA_kA_\ell$ tetraéder belső pontja.




Legyen $K$ az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontok konvex burka. Mivel az $A_1, \ldots, A_n$ pontok a $G$ gömbön fekszenek, mindegyikük csúcsa $K$-nak; a $K$ konvex poliédernek pontosan ez az $n$ csúcsa van. Többnyire $K$ lapjai háromszögek, de előfordulhat, hogy valamelyik lapnak több oldala van; az ilyen lapokat néhány átló behúzásával osszuk fel háromszögekre. (Azt is megtehetjük, hogy az $A_1, \ldots, A_n$ pontokat egy kicsit elmozdítjuk, hogy semelyik négy ne essen egy síkra.)

Jelöljük az így kapott „háromszöglapok" és „élek" számát $L$-lel, illetve $E$-vel. Az Euler-féle poliédertétel szerint $n + L = E + 2$. Minden háromszöglapot három él határol, és minden él két háromszöglapot választ el, így azt is tudjuk, hogy $2E = 3L$. A két összefüggésből $E$-t eliminálva, $3L = 2E = 2(n + L - 2) = 2n + 2L - 4$, azaz

$$L = 2n - 4. \tag{1}$$

Tetszőleges $A_iA_jA_k$ háromszöglaphoz van legalább egy olyan $A_\ell$ pont, amelyre $Q$ az $A_iA_jA_kA_\ell$ tetraéder belső pontja. Ekkor az $A_\ell Q$ egyenes az $A_iA_jA_k$ háromszög síkját az $A_iA_jA_k$ háromszöglap egy belső $B$ pontjában döfi át. Mivel $P$ konvex poliéder, az $A_\ell Q$ félegyenes csak egy háromszöglapot döfhet, és a különböző $A_iA_jA_k$ háromszöglapokhoz más és más $A_\ell$ pontok tartoznak. Ebből következik, hogy legalább annyi $A_\ell$ pont van, mint háromszöglap, vagyis

$$L \leq n. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenlőtlenségek összevetéséből kapjuk, hogy $n \leq 4$.